Exercice N°1

On considère un parallélogramme ABCD de centre O tel que AB ≠ AD , $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit E le point tel que CED soit un triangle équilatéral direct.

1/ a/ Montrer qu'il existe une rotation r tel que r(A) = E et r(B) = D.

b/ Préciser son angle θ et construire son centre I.

2/ La droite (EC) coupe (AB) en F.

a/ Montrer que E∈[AD), que le triangle AFE est équilatéral direct et que r(F) = A.

b/ En déduire que I est le centre du cercle circonscrit au triangle AEF.

3/ Soit r' la rotation de centre C et d'angle $\frac{-\pi}{3}$

a/ Déterminer r'(D) et r'(F).

b/ En déduire que les droites (FD) et (BE) se coupent en un point J et que $(\widehat{\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

4/ Soit Γ le cercle de centre Ω circonscrit au triangle ABD.

a/ Montrer que Γ passe par I et J.

b/ Montrer que les points I, O et Ω sont alignés.

On considère un parallélogramme ABCD de centre O tel que $AB \neq AD$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit E le point tel que CED soit un triangle équilatéral direct.

1/ a/ Montrer qu'il existe une rotation r tel que r(A) = E et r(B) = D.

b/ Préciser son angle θ et construire son centre I.

2/ La droite (EC) coupe (AB) en F.

a/ Montrer que E∈[AD], que le triangle AFE est équilatéral direct et que r(F) = A.

b/ En déduire que I est le centre du cercle circonscrit au triangle AEF.

3/ Soit r' la rotation de centre C et d'angle $\frac{-\pi}{3}$

a/ Déterminer r'(D) et r'(F).

b/ En déduire que les droites (FD) et (BE) se coupent en un point J et que $\left(\widehat{\overrightarrow{JD},\overrightarrow{JB}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

4/ Soit Γ le cercle de centre Ω circonscrit au triangle ABD.

a/ Montrer que Γ passe par I et J.

b/ Montrer que les points I, O et Ω sont alignés.

1) a) $R : \begin{matrix} A \longrightarrow E \\ B \longrightarrow D \end{matrix}$) ?

$\begin{cases} ABCD \text{ est un } \# \text{ donc } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ CED \text{ est équilatéral donc } DC = DE \text{ et } \overrightarrow{DC} \neq \overrightarrow{DE} \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} AB = DE \\ \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC} \end{cases}$ alors il existe une unique rotation R tq : $\begin{cases} R(A) = E \\ R(B) = D \end{cases}$

b) posons $R = R(I,\theta)$.

$\left.\begin{matrix} R(A) = E \\ R(B) = D \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{ED}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{ED}}) \equiv \pi + (\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \\ \{I\} = \text{méd}[AE] \cap \text{méd}[BD] \end{cases}$

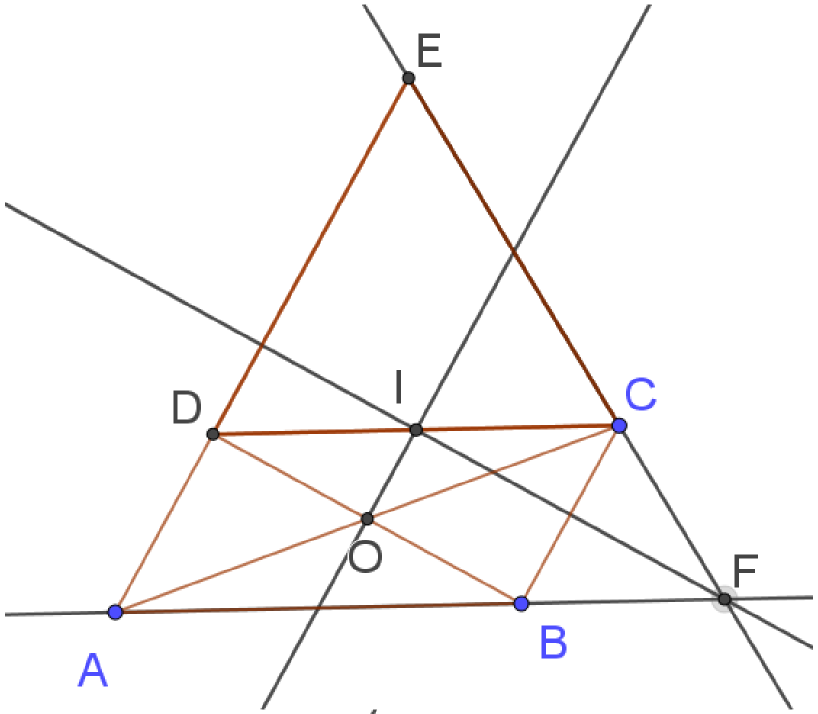
2) a) $\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \Longrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}}) [2\pi]$

$\Longrightarrow \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et de même sens

$\Longrightarrow$ $E \in [AD]$

$\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ (\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EF}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EC}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \Longrightarrow$ AFE est équilatéral de sens direct.

Lotfi Chouihi



• posons $r(F) = A'$.

$$\left.\begin{array}{l} r(A) = E \\ r(F) = A' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} EA' = AF = EA \\ (\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EA'}}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} EA' = EA \\ (\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EA}}) + (\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EA'}}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} EA' = EA \\ (\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EA'}}) \equiv 0 [2\pi] \end{array}\right. \Leftarrow \overrightarrow{EA'} = \overrightarrow{EA} \Leftrightarrow A' = A$$

d'où $\boxed{r(F) = A}$

b) $r(A) = E \Leftrightarrow IA = IE$

$r(F) = A \Leftrightarrow IF = IA$

$\rightarrow IA = IF = IE \Longrightarrow I$ est le centre de AEF.

Lotfi Chouihi

On considère un parallélogramme ABCD de centre O tel que $AB \neq AD$, $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Soit E le point tel que CED soit un triangle équilatéral direct.

1/ a/ Montrer qu'il existe une rotation r tel que r(A) = E et r(B) = D.

b/ Préciser son angle θ et construire son centre I.

2/ La droite (EC) coupe (AB) en F.

a/ Montrer que $E \in [AD]$, que le triangle AFE est équilatéral direct et que r(F) = A.

b/ En déduire que I est le centre du cercle circonscrit au triangle AEF.

3/ Soit r' la rotation de centre C et d'angle $\frac{-\pi}{3}$

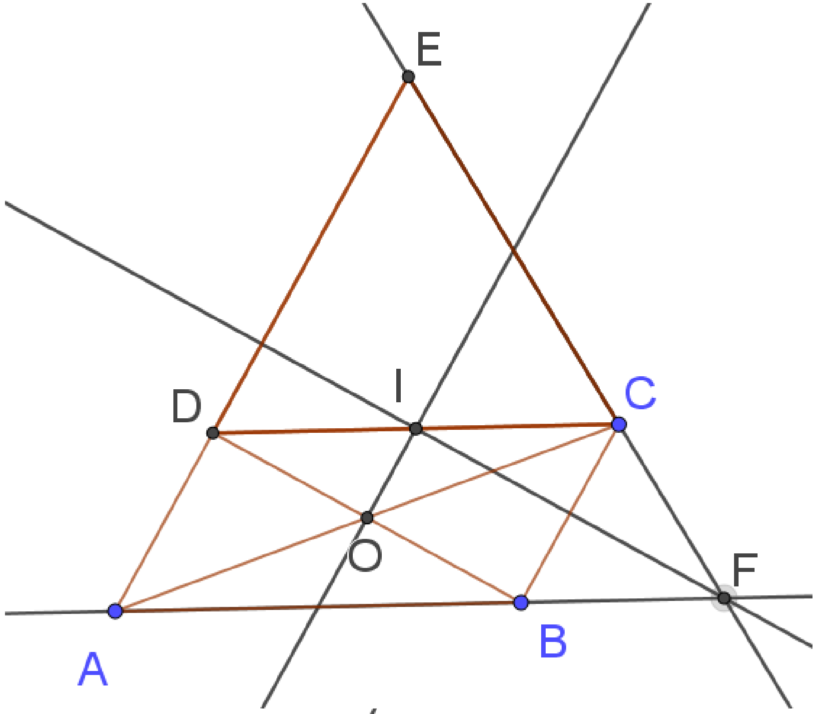
a/ Déterminer r'(D) et r'(F).

b/ En déduire que les droites (FD) et (BE) se coupent en un point J et que $(\widehat{\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JB}}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

4/ Soit Γ le cercle de centre Ω circonscrit au triangle ABD.

a/ Montrer que Γ passe par I et J.

b/ Montrer que les points I, O et Ω sont alignés.



On considère un parallélogramme ABCD de centre O tel que $AB \neq AD$, $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit E le point tel que CED soit un triangle équilatéral direct.

1/ a/ Montrer qu'il existe une rotation r tel que r(A) = E et r(B) = D.

b/ Préciser son angle θ et construire son centre I.

2/ La droite (EC) coupe (AB) en F.

a/ Montrer que $E \in [AD]$, que le triangle AFE est équilatéral direct et que r(F) = A.

b/ En déduire que I est le centre du cercle circonscrit au triangle AEF.

3/ Soit r' la rotation de centre C et d'angle $\frac{-\pi}{3}$

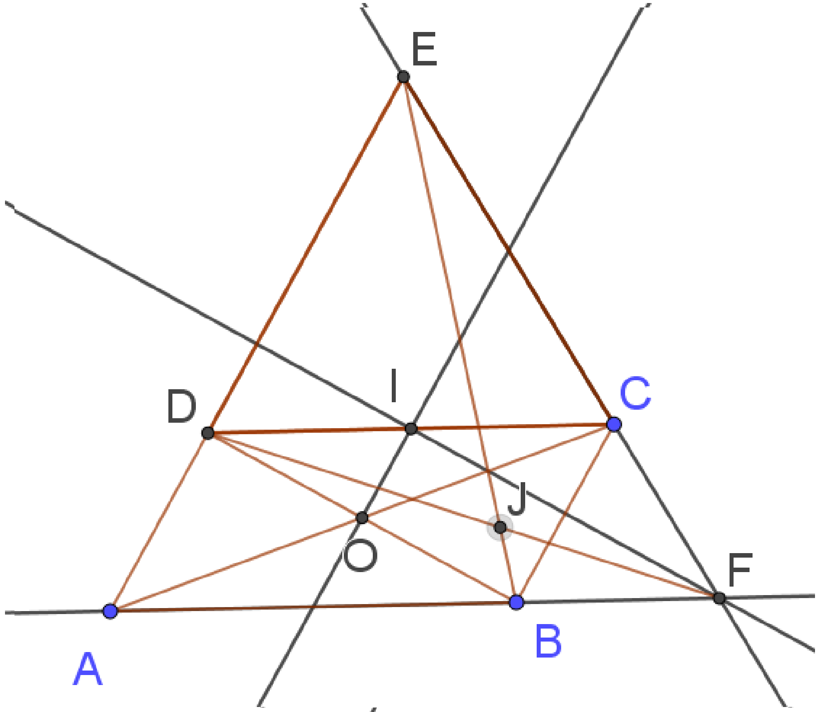
a/ Déterminer r'(D) et r'(F).

b/ En déduire que les droites (FD) et (BE) se coupent en un point J et que $(\widehat{\overrightarrow{JD},\overrightarrow{JB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

4/ Soit Γ le cercle de centre Ω circonscrit au triangle ABD.

a/ Montrer que Γ passe par I et J.

b/ Montrer que les points I, O et Ω sont alignés.



3) $r' = r(C, -\frac{\pi}{3})$

a) CED equilatéral direct donc $\begin{cases} CD = CE \\ (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow r'(D) = E$

• $\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \\ (\widehat{\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Rightarrow$ BFC est equilatéral direct $\Leftrightarrow r'(F) = B$

b) $\left.\begin{array}{l} r'(D) = E \\ r'(F) = B \end{array}\right\} \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{FD},\overrightarrow{BE}}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \Rightarrow$ (FD) et (BE) sont sécantes en un point J.

$(\widehat{\overrightarrow{JD},\overrightarrow{JB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{FD},\overrightarrow{EB}}) \equiv \pi + (\widehat{\overrightarrow{FD},\overrightarrow{BE}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

en effet : $B \in [AF]$ et $D \in [AE]$ alors le quadrilatère BFED est convexe donc $J \in [DF] \cap [BE]$.

4) a) $r(B) = D \longrightarrow (\widehat{\vec{IB}, \vec{ID}}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$

$\longrightarrow (\widehat{\vec{IB}, \vec{ID}}) \equiv \pi + (\widehat{\vec{AB}, \vec{AD}}) [2\pi] \longrightarrow I \in \overset{\frown}{BD} \setminus \{B, D\}$ du cercle circonscrit à $ABD \longrightarrow I \in \Gamma$

• $(\widehat{\vec{JD}, \vec{JB}}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \longrightarrow (\widehat{\vec{JD}, \vec{JB}}) \equiv (\widehat{\vec{AD}, \vec{AB}}) + \pi [2\pi]$

$\longrightarrow J \in \overset{\frown}{BD} \setminus \{D, B\}$ du cercle $\Gamma \longrightarrow J \in \Gamma$

b) posons $\Delta = \text{méd} [BD]$.

$\left\{ \begin{array}{l} B, D \in \Gamma \\ \Omega \text{ centre de } \Gamma \end{array} \right. \longrightarrow \Omega B = \Omega D \longrightarrow \underline{\Omega \in \Delta}$

$O = B * D \longrightarrow \underline{\Omega \in \Delta}$

$r(B) = D \longrightarrow IB = ID \longrightarrow \underline{I \in \Delta}$

$\longrightarrow$ I, O et Ω sont alignés sur Δ.

On considère un parallélogramme ABCD de centre O tel que AB ≠ AD , $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $(\widehat{\vec{DA}, \vec{DB}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Soit E le point tel que CED soit un triangle équilatéral direct.

1/ a/ Montrer qu'il existe une rotation r tel que r(A) = E et r(B) = D.

b/ Préciser son angle θ et construire son centre I.

2/ La droite (EC) coupe (AB) en F.

a/ Montrer que E∈[AD], que le triangle AFE est équilatéral direct et que r(F) = A.

b/ En déduire que I est le centre du cercle circonscrit au triangle AEF.

3/ Soit r' la rotation de centre C et d'angle $\frac{-\pi}{3}$

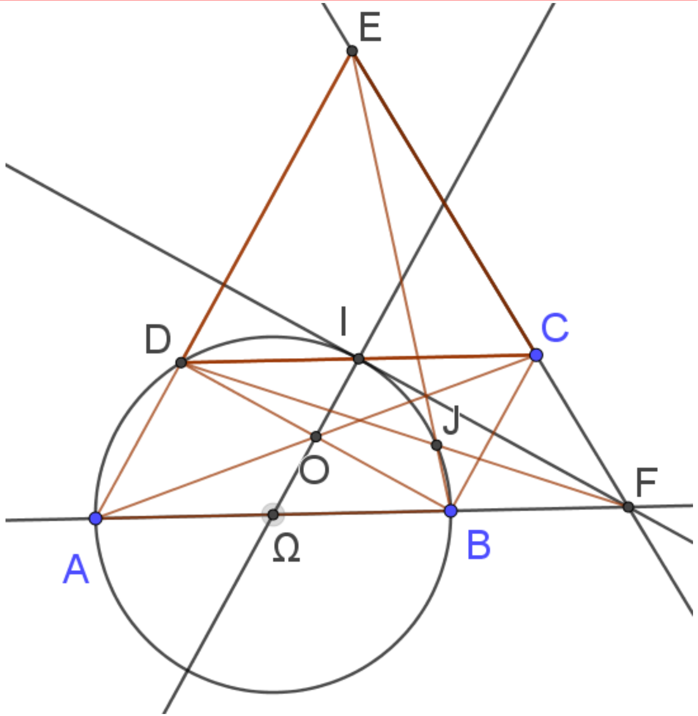
a/ Déterminer r'(D) et r'(F).

b/ En déduire que les droites (FD) et (BE) se coupent en un point J et que $(\widehat{\vec{JD}, \vec{JB}}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

4/ Soit Γ le cercle de centre Ω circonscrit au triangle ABD.

a/ Montrer que Γ passe par I et J.

b/ Montrer que les points I, O et Ω sont alignés.



Exercice N°2

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC rectangle en A et tel que $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et par O le milieu de [BC].

1) a) Faire une figure (on prendra BC = 6 cm) et déterminer la nature du triangle OAB.

b) Montrer qu'il existe une unique rotation R transformant A en C et B en O.

c) Déterminer l'angle de R et montrer que son centre Ω est un point de $\mathscr{C}$. Construire Ω.

2) Soit E l'image de A par la rotation R' de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

a) Montrer que C est l'image de E par une rotation de centre Ω dont on précisera l'angle.

b) Prouver que B est le milieu de [OE]

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC rectangle en A et tel que $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et par O le milieu de [BC].

1) a) Faire une figure (on prendra BC = 6 cm) et déterminer la nature du triangle OAB.

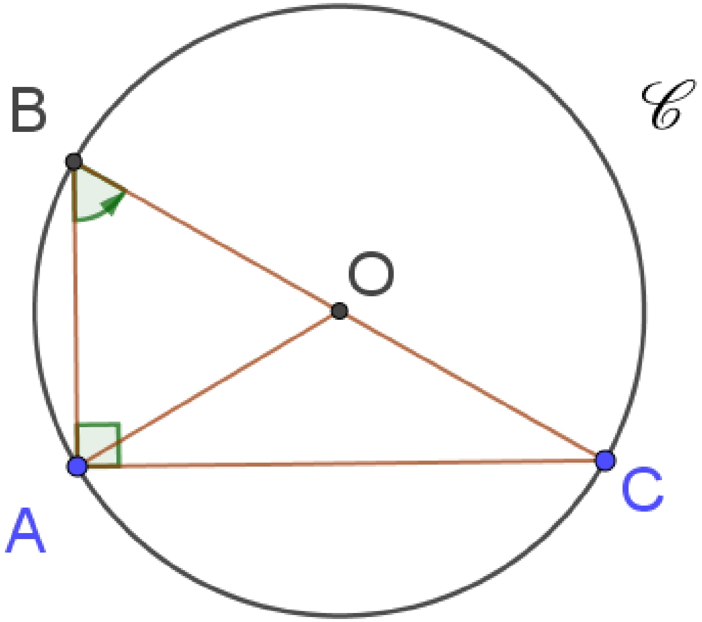
b) Montrer qu'il existe une unique rotation R transformant A en C et B en O.

c) Déterminer l'angle de R et montrer que son centre Ω est un point de $\mathscr{C}$. Construire Ω.

2) Soit E l'image de A par la rotation R' de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

a) Montrer que C est l'image de E par une rotation de centre Ω dont on précisera l'angle.

b) Prouver que B est le milieu de [OE]



1) a) $\begin{cases} ABC \text{ rect en } A \\ O = B * C \end{cases} \Longrightarrow OA = OB = OC$

$(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}}) = (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Longrightarrow$ OAB est equilatéral indirect.

b) $R : \begin{array}{l} A \to C \\ B \to O \end{array}$?

OAB equilatéral donc $AB = OB$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{OB}$

or $O = B * C$ donc $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO}$ alors :

$\begin{cases} AB = CO \\ \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CO} \end{cases}$ donc il existe une unique rotation R tel que $\begin{cases} R(A) = C \\ R(B) = O \end{cases}$

c) posons $R = r_{(\Omega,\theta)}$.

$\left.\begin{array}{l} R(A) = C \\ R(B) = O \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CO}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\longrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Lotfi Chouihi

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC rectangle en A et tel que $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et par O le milieu de [BC].

1) a) Faire une figure (on prendra BC = 6 cm) et déterminer la nature du triangle OAB.

b) Montrer qu'il existe une unique rotation R transformant A en C et B en O.

c) Déterminer l'angle de R et montrer que son centre Ω est un point de $\mathscr{C}$. Construire Ω.

2) Soit E l'image de A par la rotation R' de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

a) Montrer que C est l'image de E par une rotation de centre Ω dont on précisera l'angle.

b) Prouver que B est le milieu de [OE]

- $R(A)=C \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega C}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega C}) = (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})\ [2\pi]$

$\Rightarrow \Omega \in \overset{\frown}{CA} \setminus \{A, C\}$ du cercle $\mathscr{C}$ $\Rightarrow \Omega \in \mathscr{C}$

$R(B)=O \Rightarrow \Omega \in$ méd$[BO]$

$\Rightarrow \Omega \in \mathscr{C} \cap$ méd$[BO]$ et comme $R(A)=C \neq A$

donc $\{\Omega\} = \mathscr{C} \cap$ méd$[BO] \setminus \{A\}$.

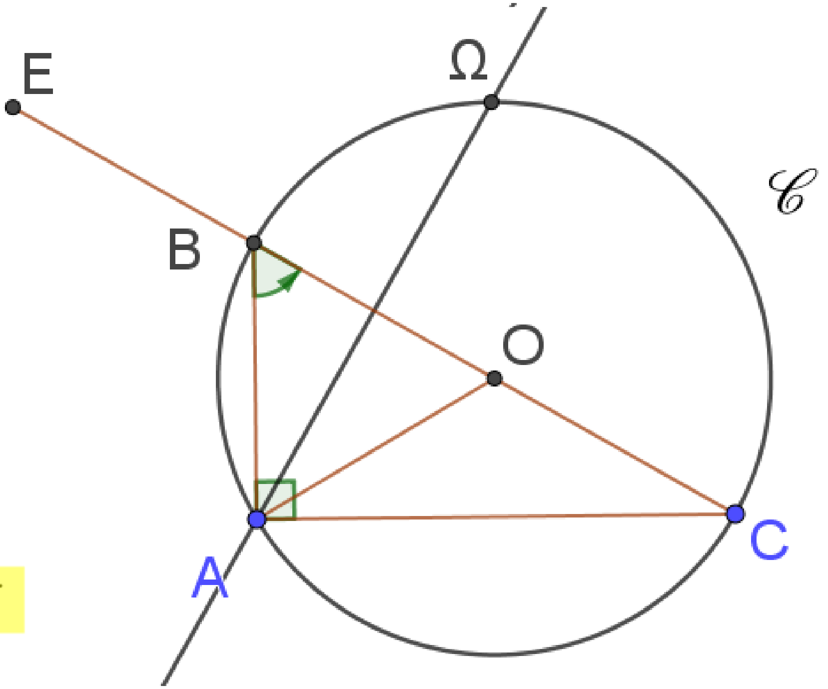
2) $E = R'(A)$ avec $R' = r(\Omega, -\frac{\pi}{3}) = R^{-1}$

a) $\begin{cases} C = R(A) \\ E = R'(A) = R^{-1}(A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = R(A) \\ A = R(E) \end{cases} \Rightarrow C = R(R(E))$

$\Rightarrow C = R \circ R(E) \Leftrightarrow C = R_{(\Omega, \frac{2\pi}{3})}(E)$

b) $\left.\begin{matrix} R(A)=C \\ R(B)=O \\ R(E)=A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \\ BE = OA = OB \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BO}) = (\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}) = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi\ [2\pi] \\ BE = BO \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BO} \Leftrightarrow B = O * E$



3) On pose R(C) = D.

a) Montrer que la droite (CD) est tangente au cercle $\mathscr{C}$ en C

b) Prouver que $D = S_\Omega(E)$.

4) Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ distinct de A et de Ω. On pose $M' = R_{(A,\frac{\pi}{3})}(M)$ et $N = t_{\overrightarrow{AC}}(M')$

a) Montrer que AM = CN

b) Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN})$.

c) En déduire que lorsque M varie, la médiatrice du segment [MN] passe par un point fixe que l'on précisera.

3) $R(C) = D$

a) $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CO}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{C\Omega}}) + (\widehat{\overrightarrow{C\Omega},\overrightarrow{CO}})\ [2\pi]$

<u>D'autre part :</u>

- $R(C) = D \iff \Omega CD$ equilatéral direct $\Longrightarrow (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{C\Omega}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$
- $R(A) = C \iff \Omega AC$ équilatéral direct de centre O $\Longrightarrow (\widehat{\overrightarrow{C\Omega},\overrightarrow{CO}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

<u>Alors</u> : $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CO}}) \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Longrightarrow$ (CD) tangente à $\mathscr{C}$ en C.

b) $D = R(C) = R(R(A)) = R\circ R\circ R\,(E)$

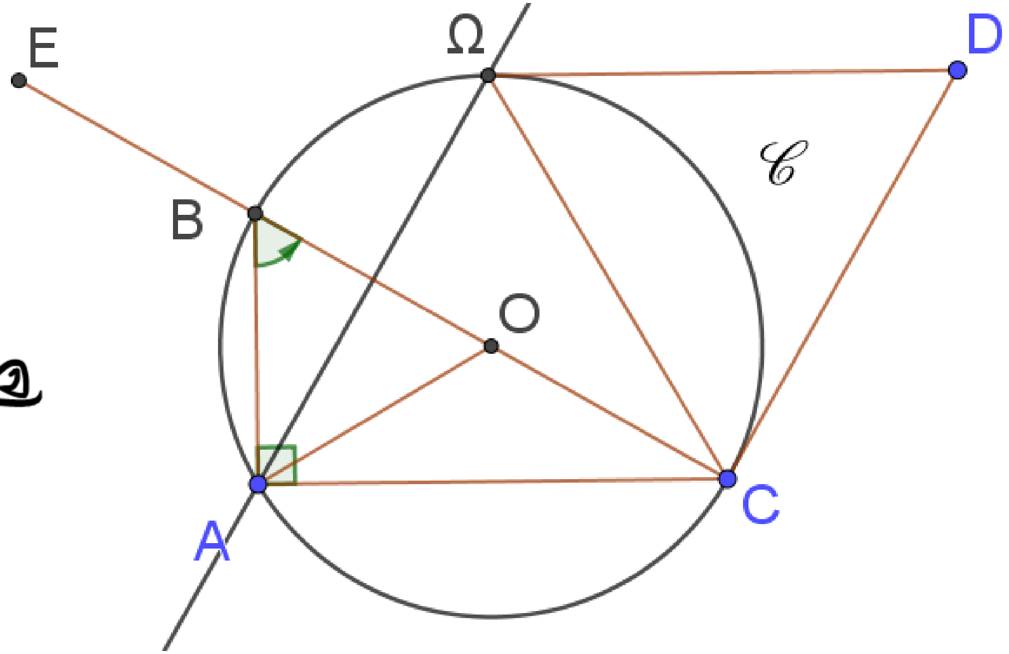
or $R\circ R\circ R = R_{(\Omega,\pi)} = S_\Omega$

donc $D = S_\Omega(E)$

4) a) $M' = R_{(A,\frac{\pi}{3})}(M) \Longrightarrow AM = AM'$ ①

$N = t_{\overrightarrow{AC}}(M') \iff \overrightarrow{M'N} = \overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{CN} \Longrightarrow AM' = CN$ ②

① et ② $\Longrightarrow AM = CN$



b) $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN}) \equiv (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) + (\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{CN})\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{3} + 0\ [2\pi]$ car $R_{(A,\frac{\pi}{3})}(M) = M'$ et $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AM'}$

d'où $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

c) $\begin{cases} AM = CN \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$ alors il existe une unique rotation r d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en C et M en N.

désignons par Ω' le centre de r.

$r(A) = C \Rightarrow \Omega' AC$ équilatéral direct $\Rightarrow \Omega' = \Omega$.

conclusion méd$[MN]$ passe par le point fixe Ω

3) On pose R(C) = D.

a) Montrer que la droite (CD) est tangente au cercle $\mathscr{C}$ en C

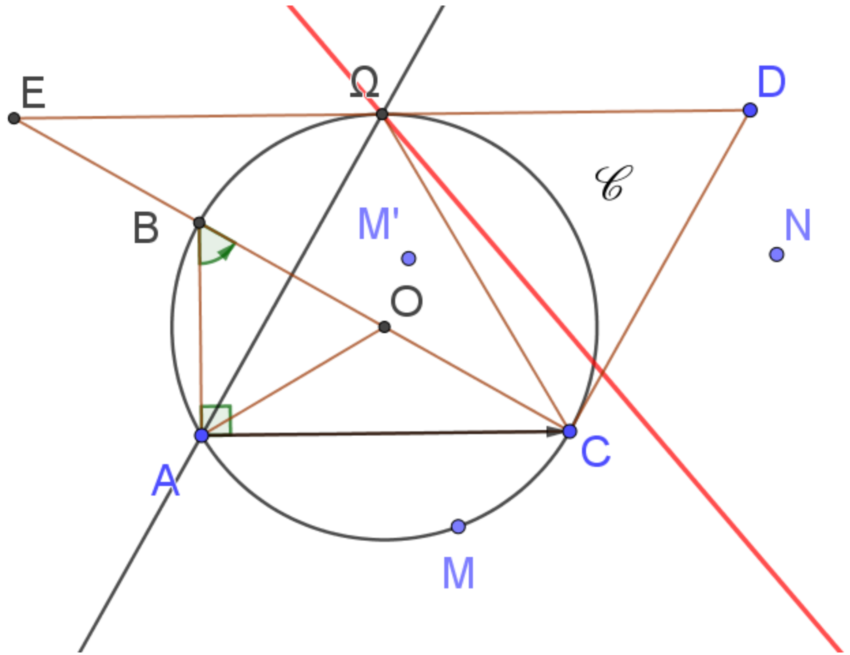
b) Prouver que D = S_Ω(E).

4) Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ distinct de A et de Ω. On pose $M' = R_{(A,\frac{\pi}{3})}(M)$ et $N = t_{\overrightarrow{AC}}(M')$

a) Montrer que AM = CN

b) Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN})$.

c) En déduire que lorsque M varie, la médiatrice du segment [MN] passe par un point fixe que l'on précisera.



Exercice N°3

ABC est un triangle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, O est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit à ABC , I est le point d'intersection des bissectrices intérieures de ABC , les points P et Q appartiennent respectivement aux demi-droites [CA) et [BA) et vérifient **CP = BQ = BC.**

1. a) Montrer que (BI) est la médiatrice du segment $[CQ]$

b) Montrer que IP = IB

c) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{QB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

2. a) Montrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme C en Q et P en B.

b) Préciser son centre et une mesure de son angle.

c) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

d) Montrer que les points I , P et Q sont alignés.

3. Soit E le point de [AB] tel que AP = BE .

a/ Montrer que R(A) = E.

b/ Construire le point F image de E par R.

(il suffit de donner une explication de la construction)

c/ Montrer que $F \in (AC)$.

1/a) $\begin{cases} BC = BQ \longrightarrow BCQ \text{ est isocèle en } B. \\ [BI) \text{ porte la bissectrice intérieure de } C\hat{B}A = C\hat{B}Q \end{cases}$

$\longrightarrow$ $(BI) = \text{méd}[CQ]$

b) $\begin{cases} CP = CB \longrightarrow CPB \text{ est isocèle en } C \\ [CI) \text{ porte la bissectrice intérieure de } A\hat{C}B = P\hat{C}B \end{cases}$

$\longrightarrow (CI) = \text{méd}[BP] \longrightarrow$ $IP = IB$

c) $(\widehat{\overrightarrow{CP},\overrightarrow{QB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}})\ [2\pi]$ car $P \in [CA)$ et $Q \in [BA)$

$\equiv \pi - (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \pi - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

$\longrightarrow$ $(\widehat{\overrightarrow{CP},\overrightarrow{QB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

2/a) $R : \begin{matrix} C \longrightarrow Q \\ P \longrightarrow B \end{matrix}$) ?

$\begin{cases} CP = QB \\ \overrightarrow{CP} \neq \overrightarrow{QB} \end{cases}$ alors il existe une unique rotation R tq : $\begin{cases} R(C) = Q \\ R(P) = B \end{cases}$

ABC est un triangle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, O est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit à ABC, I est le point d'intersection des bissectrices intérieures de ABC, les points P et Q appartiennent respectivement aux demi-droites [CA) et [BA) et vérifient **CP = BQ = BC.**

1. a) Montrer que (BI) est la médiatrice du segment $[CQ]$

b) Montrer que IP = IB

c) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{CP},\overrightarrow{QB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

2. a) Montrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme C en Q et P en B.

b) Préciser son centre et une mesure de son angle.

c) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

d) Montrer que les points I, P et Q sont alignés.

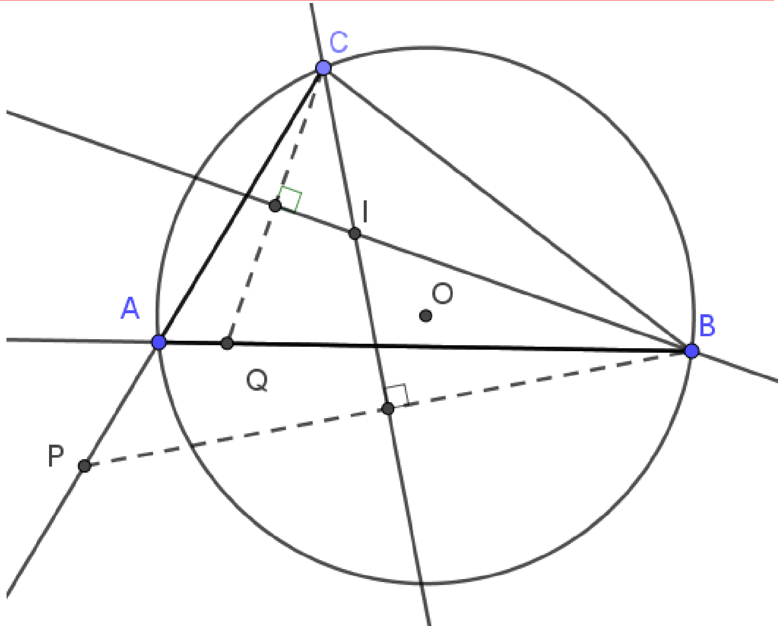
3. Soit E le point de [AB] tel que AP = BE.

a/ Montrer que R(A) = E.

b/ Construire le point F image de E par R.

(il suffit de donner une explication de la construction)

c/ Montrer que F ∈ (AC).



b) posons $R = r_{(\Omega,\theta)}$.

$\left.\begin{array}{l} R(C) = Q \\ R(P) = B \end{array}\right\} \Rightarrow \{\Omega\} = \text{méd}[CQ] \cap \text{méd}[PB]$

$= (BI) \cap (CI) = \{I\}$ d'où $\Omega = I$

$\left.\begin{array}{l} R(C) = Q \\ R(P) = B \end{array}\right\} \rightarrow \theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{QB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

conclusion : $R = r_{(I, \frac{2\pi}{3})}$

c) $(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}}) \equiv \pi - \left((\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}}) + (\widehat{\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CB}})\right)\ [2\pi]$

$\equiv \pi - \left(\frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) + \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})\right)\ [2\pi]$

$\equiv \pi - \frac{1}{2}\left(\pi - (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})\right)\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \longrightarrow (\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

d) $(\widehat{\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IQ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IB}}) + (\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}}) + (\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IQ}})\ [2\pi]$

$\equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ car $R(P) = B$ et $R(C) = Q$

$\longrightarrow (\widehat{\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IQ}}) \equiv 0\ [2\pi] \longrightarrow$ I, P et Q sont alignés.

ABC est un triangle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, O est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit à ABC, I est le point d'intersection des bissectrices intérieures de ABC, les points P et Q appartiennent respectivement aux demi-droites [CA) et [BA) et vérifient **CP = BQ = BC.**

1. a) Montrer que (BI) est la médiatrice du segment $[CQ]$

b) Montrer que IP = IB

c) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{QB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

2. a) Montrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme C en Q et P en B.

b) Préciser son centre et une mesure de son angle.

c) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

d) Montrer que les points I, P et Q sont alignés.

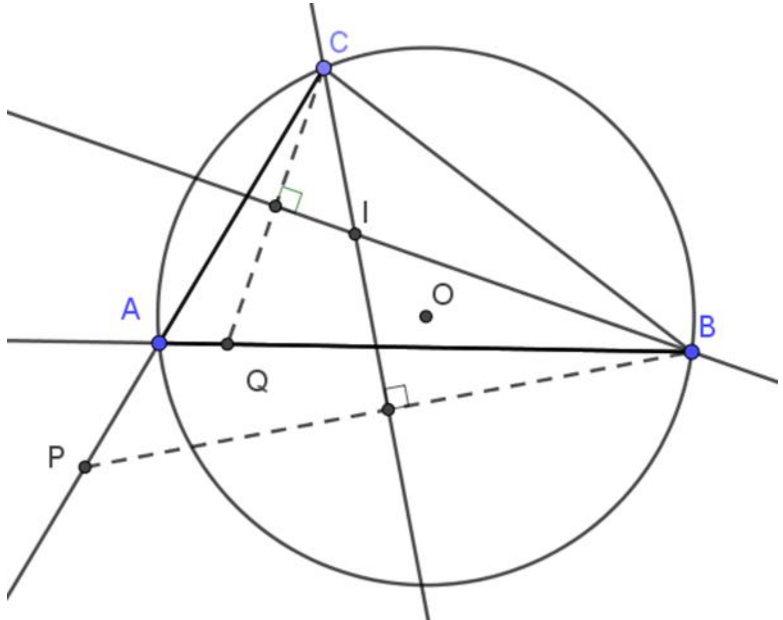
3. Soit E le point de [AB] tel que AP = BE.

a/ Montrer que R(A) = E.

b/ Construire le point F image de E par R.

(il suffit de donner une explication de la construction)

c/ Montrer que F ∈ (AC).



3) a) posons $R(A) = E'$

. $A \in [CP] \longrightarrow R(A) \in R\langle [CP] \rangle$

$\longrightarrow E' \in [QB] \subset [BA) \longrightarrow (\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BE'}}) \equiv 0\ [2\pi]$

. $\left.\begin{array}{l} R(A) = E' \\ R(P) = B \end{array}\right\} \longrightarrow BE' = PA \xrightarrow{PA = BE} BE = BE'$

$\left\{\begin{array}{l} BE = BE' \\ (\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BE'}}) \equiv 0\ [2\pi] \end{array}\right. \Longleftrightarrow \overrightarrow{BE'} = \overrightarrow{BE} \Longleftrightarrow E' = E$

d'où $\boxed{R(A) = E}$

b) $F = R(E) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} IF = IE \\ (\widehat{\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IF}}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \end{array}\right.$

c) $\left.\begin{array}{l} R(A) = E \\ R(E) = F \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} AE = EF \\ (\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EF}}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} EA = EF \\ (\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EF}}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow$ AEF equilatéral direct $\longrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

$\longrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})\ [2\pi] \Longleftrightarrow \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

et de même sens $\longrightarrow \boxed{F \in (AC)}$

Lotfi Chouihi

ABC est un triangle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$, O est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit à ABC, I est le point d'intersection des bissectrices intérieures de ABC, les points P et Q appartiennent respectivement aux demi-droites [CA) et [BA) et vérifient **CP = BQ = BC.**

1. a) Montrer que (BI) est la médiatrice du segment $[CQ]$

b) Montrer que IP = IB

c) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{QB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.

2. a) Montrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme C en Q et P en B.

b) Préciser son centre et une mesure de son angle.

c) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.

d) Montrer que les points I, P et Q sont alignés.

3. Soit E le point de [AB] tel que AP = BE.

a/ Montrer que R(A) = E.

b/ Construire le point F image de E par R.

(il suffit de donner une explication de la construction)

c/ Montrer que F ∈ (AC).