Exercice N°9

1/ Soit n un entier naturel.

a/ Montrer que si n est impair alors $n^4 \equiv 1 \pmod{16}$

b/ Déterminer les restes modulo 16 de n^4.

c/ Montrer que si $a \wedge b = 1$ alors $a^n \wedge b^p = 1$ pour tous p et n dans IN*

d/ Montrer que pour tout n dans IN*, $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$

2/ Soit A l'ensemble des triplets (x,y,p) solutions de l'équation (E): $x^4 + 4 = py^4$ où x et y sont deux entiers naturels et p un nombre premier. Soit (x,y,p) une solution de (E)

a/ On prend dans cette question p = 2.

i. Montrer que x est pair et que $2y^4 \equiv 0 \pmod{16}$ ou $2y^4 \equiv 2 \pmod{16}$

ii. Déduire que (E) n'admet pas de solution

b/ Dans tout ce qui suit on prend p > 2

i. Montrer que x et y sont impairs

ii. Soit $d = (x^2 - 2x + 2) \wedge (x^2 + 2x + 2)$

Montrer que d est impair puis que d divise x. En déduire que d = 1

iii. Montrer qu'ils existent deux entiers naturels a et b tels que:

$(x-1)^2 + 1 = a^4$ et $(x+1)^2 + 1 = pb^4$

iv. Déduire que a = 1 , x = 1 , p = 5 et b = 1

c/ Déterminer A.

Exercice N°9

1/ a) n impair $\Leftrightarrow n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \longrightarrow n^2 = 4k^2+4k+1$

$\longrightarrow (n^2-1)(n^2+1) = (4k^2+4k)(4k^2+4k+2)$

$= 8k(k+1)(2k^2+2k+1)$

or $k(k+1)$ est pair $\longrightarrow k(k+1) = 2p,\ p \in \mathbb{N}$.

$\longrightarrow n^4 - 1 = 16p(2k^2+2k+1) \equiv 0\,[16] \longrightarrow n^4 \equiv 1\,[16]$

b) si $n = 2k$ alors $n^4 = 16k^4 \equiv 0\,[16] \longrightarrow \underline{r = 0}$

si $n = 2k+1$ alors $n^4 \equiv 1\,[16] \longrightarrow \underline{r = 1}$

c) posons $d = a^n \wedge b^p$

<u>supposons que $d \neq 1$</u>

$d \neq 1$ alors d admet un diviseur premier q.

$$\left.\begin{array}{l} q \mid a^n \\ q \mid b^p \\ q \text{ premier} \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} q \mid a \\ q \mid b \end{array}\right. \longrightarrow q \mid a\wedge b = 1 \longrightarrow q = 1$$

absurde car q premier

donc $d = 1$

$\longrightarrow a^n \wedge b^p = 1$.

1/ Soit n un entier naturel.

a/ Montrer que si n est impair alors $n^4 \equiv 1 \pmod{16}$

b/ Déterminer les restes modulo 16 de n^4.

c/ Montrer que si $a\wedge b = 1$ alors $a^n \wedge b^p = 1$ pour tous p et n dans $\mathbb{N}^*$

d/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a^n \wedge b^n = (a\wedge b)^n$

2/ Soit A l'ensemble des triplets (x,y,p) solutions de l'équation (E): $x^4 + 4 = py^4$ où x et y sont deux entiers naturels et p un nombre premier.

Soit (x,y,p) une solution de (E)

a/ On prend dans cette question p = 2.

i. Montrer que x est pair et que $2y^4 \equiv 0 \pmod{16}$ ou $2y^4 \equiv 2 \pmod{16}$

ii. Déduire que (E) n'admet pas de solution

b/ Dans tout ce qui suit on prend p > 2

i. Montrer que x et y sont impairs

Ii. Soit $d = (x^2 - 2x + 2)\wedge(x^2 + 2x + 2)$

Montrer que d est impair puis que d divise x.

En déduire que d = 1

iii. Montrer qu'ils existent deux entiers naturels a et b tels que: $(x-1)^2 + 1 = a^4$ et $(x+1)^2 + 1 = pb^4$

iv. Déduire que a = 1 , x = 1 , p = 5 et b = 1

c/ Déterminer A.

Exercice N°9

1/ Soit n un entier naturel.

a/ Montrer que si n est impair alors $n^4 \equiv 1 \pmod{16}$

b/ Déterminer les restes modulo 16 de n^4.

c/ Montrer que si $a \wedge b = 1$ alors $a^n \wedge b^p = 1$
pour tous p et n dans IN*

d/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$

2/ Soit A l'ensemble des triplets (x,y,p) solutions de l'équation (E): $x^4 + 4 = py^4$ où x et y sont deux entiers naturels et p un nombre premier.

Soit (x,y,p) une solution de (E)

a/ On prend dans cette question p = 2.

i. Montrer que x est pair et que
$2y^4 \equiv 0 \pmod{16}$ ou $2y^4 \equiv 2 \pmod{16}$

ii. Déduire que (E) n'admet pas de solution

b/ Dans tout ce qui suit on prend p > 2

i. Montrer que x et y sont impairs

Ii. Soit $d = (x^2 - 2x + 2) \wedge (x^2 + 2x + 2)$
Montrer que d est impair puis que d divise x.
En déduire que d = 1

iii. Montrer qu'ils existent deux entiers naturels a et b tels que: $(x - 1)^2 + 1 = a^4$ et $(x + 1)^2 + 1 = pb^4$

iv. Déduire que a = 1 , x = 1 , p = 5 et b = 1

c/ Déterminer A.

---

d) posons $d = a \wedge b$ alors il existe $(a', b') \in \mathbb{N}^2$ tq:

$\begin{cases} a = da' \\ b = db' \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$ donc $a^n \wedge b^n = (da')^n \wedge (db')^n$

$= d^n (a'^n \wedge b'^n)$

or $a' \wedge b' = 1$ donc, d'après c) $a'^n \wedge b'^n = 1$

$\Longrightarrow a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$

2) (E): $x^4 + 4 = py^4$.

a) pour p = 2 (E): $x^4 + 4 = 2y^4$.

i) $x^4 + 4 = 2y^4 \Longrightarrow x^4 \equiv 0 \,[2] \Longrightarrow x \equiv 0 \,[2]$

Car si $x \equiv 1 \,[2]$ alors $x^4 \equiv 1 \,[2]$ donc x est pair

$\begin{cases} \text{si } y = 2k \text{ alors } y^4 = 16k^4 \equiv 0 \,[16] \Longrightarrow 2y^4 \equiv 0 \,[16] \\ \text{si } y = 2k+1 \text{ alors, d'après 1/a); } y^4 \equiv 1 \,[16] \Longrightarrow 2y^4 \equiv 2 \,[16] \end{cases}$

Exercice N°9

ii/ $\begin{cases} x^4+4=2y^4 \\ x \text{ pair} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y^4 \equiv x^4+4\ [16] \\ x^4 \equiv 0\ [16] \end{cases}$

$\Rightarrow 2y^4 \equiv 4\ [16] \xrightarrow{i/} 2 \equiv 4\ [16]$ ou $0 \equiv 4\ [16]$

$\Rightarrow$ 16 divise 2 ou 16 divise 4 ce qui est absurde

donc $S_E = \emptyset$

b) i/ $\begin{cases} p \text{ premier} \\ p > 2 \end{cases} \Rightarrow p$ impair.

• si x et y sont pairs

$\left.\begin{array}{l} x^4 \equiv 0\ [16] \\ y^4 \equiv 0\ [16] \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x^4 \equiv 0\ [16] \\ py^4 \equiv 0\ [16] \end{cases} \Rightarrow py^4 - x^4 \equiv 0\ [16]$

or $py^4 - x^4 = 4 \equiv 4\ [16]$ ce qui est absurde

si x est pair et y imp.

$\left.\begin{array}{l} x^4 \equiv 0\ [16] \\ y^4 \equiv 1\ [16] \end{array}\right\} \Rightarrow py^4 - x^4 \equiv p\ [16] \Rightarrow p \equiv 4\ [16] \Rightarrow p = 16k+4 = 4(4k+1)$

absurde car p premier.

1/ Soit n un entier naturel.

a/ Montrer que si n est impair alors $n^4 \equiv 1$ (mod16)

b/ Déterminer les restes modulo 16 de n^4.

c/ Montrer que si $a \wedge b = 1$ alors $a^n \wedge b^p = 1$ pour tous p et n dans IN*

d/ Montrer que $\forall n \in IN^*$, $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$

2/ Soit A l'ensemble des triplets (x,y,p) solutions de l'équation (E): $x^4 + 4 = py^4$ où x et y sont deux entiers naturels et p un nombre premier.

Soit (x,y,p) une solution de (E)

a/ On prend dans cette question p = 2.

i. Montrer que x est pair et que $2y^4 \equiv 0$ (mod 16) ou $2y^4 \equiv 2$ (mod 16)

ii. Déduire que (E) n'admet pas de solution

b/ Dans tout ce qui suit on prend p > 2

i. Montrer que x et y sont impairs

Ii. Soit $d = (x^2 - 2x + 2) \wedge (x^2 + 2x + 2)$

Montrer que d est impair puis que d divise x.

En déduire que d = 1

iii. Montrer qu'ils existent deux entiers naturels a et b tels que: $(x-1)^2 + 1 = a^4$ et $(x+1)^2 + 1 = pb^4$

iv. Déduire que a = 1 , x = 1 , p = 5 et b = 1

c/ Déterminer A.

Exercice N°9

1/ Soit n un entier naturel.
a/ Montrer que si n est impair alors $n^4 \equiv 1 \pmod{16}$
b/ Déterminer les restes modulo 16 de n^4.
c/ Montrer que si $a \wedge b = 1$ alors $a^n \wedge b^p = 1$ pour tous p et n dans IN*
d/ Montrer que $\forall n \in IN^*$, $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$
2/ Soit A l'ensemble des triplets (x,y,p) solutions de l'équation (E): $x^4 + 4 = py^4$ où x et y sont deux entiers naturels et p un nombre premier.
Soit (x,y,p) une solution de (E)
a/ On prend dans cette question p = 2.
i. Montrer que x est pair et que $2y^4 \equiv 0 \pmod{16}$ ou $2y^4 \equiv 2 \pmod{16}$
ii. Déduire que (E) n'admet pas de solution
b/ Dans tout ce qui suit on prend p > 2
i. Montrer que x et y sont impairs
ii. Soit $d = (x^2 - 2x + 2) \wedge (x^2 + 2x + 2)$
Montrer que d est impair puis que d divise x.
En déduire que d = 1
iii. Montrer qu'ils existent deux entiers naturels a et b tels que: $(x-1)^2 + 1 = a^4$ et $(x+1)^2 + 1 = pb^4$
iv. Déduire que a = 1 , x = 1 , p = 5 et b = 1
c/ Déterminer A.

si x est impair et y pair

$x^4 \equiv 1 [16]$
$y^4 \equiv 0 [16]$ $\Big\} \Rightarrow py^4 - x^4 \equiv -1 \equiv 15 [16]$

or $py^4 - x^4 = 4$ donc $4 \equiv 15 [16] \Rightarrow 16$ divise 11

absurde

d'où x et y sont impairs.

ii) $x \equiv 1 [2] \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2 \equiv 1 - 2 + 2 \equiv 1 [2] \\ x^2 + 2x + 2 \equiv 1 + 2 + 2 \equiv 1 [2] \end{cases}$

$\Rightarrow (x^2 - 2x + 2) \wedge (x^2 + 2x + 2)$ est impair

$\Rightarrow$ d est impair.

$\begin{cases} d \mid x^2 - 2x + 2 \\ d \mid x^2 + 2x + 2 \end{cases} \Rightarrow d \mid (x^2 + 2x + 2) - (x^2 - 2x + 2)$

$\Rightarrow d \mid 4x$ or d impair $\Rightarrow d \wedge 4 = 1$ donc d'après Gauss

d divise x

Exercice N°9

1/ Soit n un entier naturel.
a/ Montrer que si n est impair alors $n^4 \equiv 1 \pmod{16}$
b/ Déterminer les restes modulo 16 de n^4.
c/ Montrer que si $a \wedge b = 1$ alors $a^n \wedge b^p = 1$
pour tous p et n dans IN*
d/ Montrer que $\forall n \in IN^*$, $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$
2/ Soit A l'ensemble des triplets (x,y,p) solutions de l'équation (E): $x^4 + 4 = py^4$ où x et y sont deux entiers naturels et p un nombre premier.
Soit (x,y,p) une solution de (E)
a/ On prend dans cette question p = 2.
i. Montrer que x est pair et que
$2y^4 \equiv 0 \pmod{16}$ ou $2y^4 \equiv 2 \pmod{16}$
ii. Déduire que (E) n'admet pas de solution
b/ Dans tout ce qui suit on prend p > 2
i. Montrer que x et y sont impairs
Ii. Soit $d = (x^2 - 2x + 2) \wedge (x^2 + 2x + 2)$
Montrer que d est impair puis que d divise x.
En déduire que d = 1
iii. Montrer qu'ils existent deux entiers naturels a et b tels que: $(x-1)^2 + 1 = a^4$ et $(x+1)^2 + 1 = pb^4$
iv. Déduire que a = 1 , x = 1 , p = 5 et b = 1
c/ Déterminer A.

$$\begin{cases} d \mid x \\ d \mid x^2+2x+2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} d \mid x(x+2) \\ d \mid x^2+2x+2 \end{cases}$$

$\longrightarrow d \mid (x^2+2x+2) - x(x+2) \longrightarrow d \mid 2$

$\longrightarrow d = 1$ ou $d = 2$ or d impair donc $d = 1$

iii) $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2) = (x^2+2)^2 - (2x)^2$
$= x^4 + 4 = py^4$.

$\longrightarrow p \mid (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$
et comme (p est premier et $(x^2-2x+2) \wedge (x^2+2x+2) = 1$)
donc p divise x^2-2x+2 ou x^2+2x+2 (pas les deux)
Considérons le cas où $p \mid x^2+2x+2$.

$$\begin{cases} (x^2-2x+2) \cdot \left(\dfrac{x^2+2x+2}{p}\right) = y^4 \\ (x^2-2x+2) \wedge \left(\dfrac{x^2+2x+2}{p}\right) = 1 \end{cases}$$

Exercice N°9

1/ Soit n un entier naturel.

a/ Montrer que si n est impair alors $n^4 \equiv 1 \pmod{16}$

b/ Déterminer les restes modulo 16 de n^4.

c/ Montrer que si $a \wedge b = 1$ alors $a^n \wedge b^p = 1$
pour tous p et n dans IN*

d/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$

2/ Soit A l'ensemble des triplets (x,y,p) solutions de l'équation (E): $x^4 + 4 = py^4$ où x et y sont deux entiers naturels et p un nombre premier.

Soit (x,y,p) une solution de (E)

a/ On prend dans cette question p = 2.

i. Montrer que x est pair et que
$2y^4 \equiv 0 \pmod{16}$ ou $2y^4 \equiv 2 \pmod{16}$

ii. Déduire que (E) n'admet pas de solution

b/ Dans tout ce qui suit on prend p > 2

i. Montrer que x et y sont impairs

Ii. Soit $d = (x^2 - 2x + 2) \wedge (x^2 + 2x + 2)$

Montrer que d est impair puis que d divise x.

En déduire que d = 1

iii. Montrer qu'ils existent deux entiers naturels a et b tels que: $(x - 1)^2 + 1 = a^4$ et $(x + 1)^2 + 1 = pb^4$

iv. Déduire que a = 1 , x = 1 , p = 5 et b = 1

c/ Déterminer A.

$((n^2-2n+2)\wedge y)^4 = (n^2-2n+2)^4 \wedge y^4$ (d'après 1) d/ $a^4 \wedge b^4 = (a\wedge b)^4$)

$= (n^2-2n+2)^4 \wedge \left[(n^2-2n+2) \cdot \left(\frac{n^2+2n+2}{p} \right) \right]$

$= (n^2-2n+2) \left[\underbrace{(n^2-2n+3)^3 \wedge \left(\frac{n^2+2n+2}{p} \right)}_{1} \right]$ (d'après 1/ c/)

$= n^2-2n+2$ (on justifie que si $a \wedge b = 1$ alors $a^n \wedge b = 1$)

en posant : $a = (n^2-2n+2)\wedge y$ on a : $a^4 = n^2-2n+2 = (n-1)^2+1$

D'une manière analogue on prouve qu'il existe $b \in \mathbb{N}$

tq : $\frac{n^2+2n+2}{p} = b^4 \rightarrow pb^4 = (n+1)^2+1$.

Exercice N°9

iv/ $(x-1)^2+1=a^4 \Leftrightarrow (a^2-x+1)(a^2+x-1)=1$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2-x+1=1 \\ a^2+x-1=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a^2-x+1=-1 \\ a^2+x-1=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a^2=2 \\ 2x=2 \end{cases}$ ou $\{ 2a^2=-2$: imp $\rightarrow \begin{cases} a=1 \\ x=1 \end{cases}$

$\begin{cases} pb^4=5 \\ p \text{ premier} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p=5 \\ b=1 \end{cases}$

c) D'après ce qui précède : $A=\{(1,1,5)\}$

1/ Soit n un entier naturel.
a/ Montrer que si n est impair alors $n^4 \equiv 1 \pmod{16}$
b/ Déterminer les restes modulo 16 de n^4.
c/ Montrer que si $a \wedge b = 1$ alors $a^n \wedge b^p = 1$
pour tous p et n dans IN*
d/ Montrer que $\forall n \in IN^*$, $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$
2/ Soit A l'ensemble des triplets (x,y,p) solutions de l'équation (E): $x^4 + 4 = py^4$ où x et y sont deux entiers naturels et p un nombre premier.
Soit (x,y,p) une solution de (E)
a/ On prend dans cette question p = 2.
i. Montrer que x est pair et que
$2y^4 \equiv 0 \pmod{16}$ ou $2y^4 \equiv 2 \pmod{16}$
ii. Déduire que (E) n'admet pas de solution
b/ Dans tout ce qui suit on prend p > 2
i. Montrer que x et y sont impairs
Ii. Soit $d = (x^2 - 2x + 2) \wedge (x^2 + 2x + 2)$
Montrer que d est impair puis que d divise x.
En déduire que d = 1
iii. Montrer qu'ils existent deux entiers naturels a et b tels que: $(x-1)^2 + 1 = a^4$ et $(x+1)^2 + 1 = pb^4$
iv. Déduire que a = 1 , x = 1 , p = 5 et b = 1
c/ Déterminer A.

Exercice N°10

Lycée Pilote Ariana - DC 3 2016

Exercice 1 : (6 points).

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$u_n = 2^n + 3.7^n + 14^n - 1.$

1) a) Calculer u_3.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.

c) On note E l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n). Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?.

2) Soit p un nombre premier strictement supérieur à 7.

Soient m et n deux entiers naturels tels que 14 = m.n.

a) Quelles sont les valeurs possibles de m?

b) Montrer que $14m^{p-2} \equiv n\ (mod\ p\ )$.

c) En déduire que $14u_{p-2} \equiv 0\ (mod\ p\ )$.

d) L'entier p appartient-il à l'ensemble E ?

e) Déterminer alors E.

Exercice N°10

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :
$u_n = 2^n + 3.7^n + 14^n - 1$.

1) a) Calculer u_3.
b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
c) On note E l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n). Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?.

2) Soit p un nombre premier strictement supérieur à 7.
Soient m et n deux entiers naturels tels que 14 = m.n.
a) Quelles sont les valeurs possibles de m?
b) Montrer que $14m^{p-2} \equiv n \ (mod\ p)$.
c) En déduire que $14u_{p-2} \equiv 0 \ (mod\ p)$.
d) L'entier p appartient-il à l'ensemble E ?
e) Déterminer alors E.

1) a) $U_3 = 2^3 + 3\times 7^3 + 14^3 - 1 = 3780$.

b) $\begin{cases} 2 \equiv 0 [2] \\ 7 \equiv 1 [2] \\ 14 \equiv 0 [2] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^n \equiv 0 [2] \\ 7^n \equiv 1 [2] \\ 14^n \equiv 1 [2] \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\rightarrow U_n \equiv 0 + 3 + 0 - 1 \equiv 2 \equiv 0 [2] \rightarrow U_n$ est pair.

c) $U_3 = 3780 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \rightarrow 2, 3, 5$ et $7 \in E$.

2) a) $mn = 14 \rightarrow m$ divise $14 \rightarrow m \in \{1, 2, 7, 14\}$.

b) $14m^{p-2} = mn\, m^{p-2} = n \times m^{p-1}$

D'autre part $\begin{cases} p \text{ premier et } p > 7 \\ m \in \{1, 2, 7, 14\} \end{cases} \rightarrow p$ ne divise pas m.

$\left.\begin{matrix} p \text{ premier} \\ p \text{ ne divise } m \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{Fermat}} m^{p-1} \equiv 1 [p] \rightarrow n\, m^{p-1} \equiv n [p]$

$\rightarrow 14m^{p-2} \equiv n [p]$

Exercice N°10

c) $14U_{p-2} = 14\times 2^{p-2} + 3\times 14\times 7^{p-2} + 14\times 14^{p-2} - 14$

or d'après a) et b) $\begin{cases} 14m^{p-2} \equiv n\ [p] \\ (m,n) \in \{(1,14);(2,7);(7,2);(14,1)\} \end{cases}$

donc : $14U_{p-2} \equiv 7 + 3\times 2 + 1 - 14\ [p]$

$\longrightarrow 14U_{p-2} \equiv 0\ [p]$

d) d'après c) p divise $14U_{p-2}$ et comme (p premier et $p > 7$) donc $p\wedge 14 = 1$

$\left.\begin{array}{l} p \mid 14U_{p-2} \\ p\wedge 14 = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Gauss}} p \mid U_{p-2} \longrightarrow p \in E$

e) d'après ce qui précède E est l'ensemble de tous les nombres premiers.

Exercice N°11

I. Soit l'équation dans Z (E): $2x^4 + x - 1 \equiv 0 \ [10]$

1/ Soit x une solution de (E)

a/ Montrer que $10 \wedge x = 1$

b/ En déduire que $x \equiv -1 \ [10]$

2/ Déterminer l'ensemble des solutions de (E),

II. On considère dans IR+ l'équation

(F): $2x^4 + x - 1 = 0$

1/ Montrer que l'équation (F) admet une unique solution λ dans IR+ et que $\lambda \in]0,1[$

2/ Montrer que $\lambda \notin Q$

Exercice N°11

I. Soit l'équation dans Z (E): $2x^4 + x - 1 \equiv 0\ [10]$

1/ Soit x une solution de (E)

a/ Montrer que $10 \wedge x = 1$

b/ En déduire que $x \equiv -1\ [10]$

2/ Déterminer l'ensemble des solutions de (E),

II. On considère dans IR+ l'équation

(F): $2x^4 + x - 1 = 0$

1/ Montrer que l'équation (F) admet une unique solution λ dans IR+ et que $\lambda \in]0,1[$

2/ Montrer que $\lambda \notin Q$

1) a) $10 = 5 \times 2$ donc $10 \wedge x \in \{1, 2, 5, 10\}$ .. posons $d = 10 \wedge x$

$$\begin{cases} \text{si } d = 2 \text{ alors } x \equiv 0\ [2] \longrightarrow 2x^4 + x - 1 \equiv -1 \equiv 1\ [2] \\ \text{si } d = 5 \text{ alors } x \equiv 0\ [5] \longrightarrow 2x^4 + x - 1 \equiv -1 \equiv 4\ [5] \\ \text{si } d = 10 \text{ alors } x \equiv 0\ [10] \longrightarrow 2x^4 + x - 1 \equiv -1 \equiv 9\ [10] \end{cases}$$

or $2x^4 + x - 1 \equiv 0\ [10] \longrightarrow \begin{cases} 2x^4 + x - 1 \equiv 0\ [2] \\ 2x^4 + x - 1 \equiv 0\ [5] \end{cases}$ absurde

donc $10 \wedge x = 1$

2ᵉ idée : $2x^4 + x - 1 \equiv 0\ [10] \Leftrightarrow 2x^4 + x - 1 = 10k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x(2x^3 + 1) - 10k = 1$

Bézout $\Longrightarrow x \wedge 10 = 1$

b) soit r le reste modulo 10 de x

$10 \wedge x = 1 \longrightarrow r \notin \{0, 2, 4, 5, 6, 8\} \longrightarrow r \in \{1, 3, 7, 9\}$

r	1	3	7	9
$r(2x^4 + x - 1)\ [10]$	2	4	8	0

$\longrightarrow r = 9 \longrightarrow x \equiv 9\ [10] \longrightarrow x \equiv -1\ [10]$

Exercice N°11

I. Soit l'équation dans Z (E): $2x^4 + x - 1 \equiv 0\ [10]$

1/ Soit x une solution de (E)

a/ Montrer que $10 \wedge x = 1$

b/ En déduire que $x \equiv -1\ [10]$

2/ Déterminer l'ensemble des solutions de (E),

II. On considère dans IR+ l'équation

(F): $2x^4 + x - 1 = 0$

1/ Montrer que l'équation (F) admet une unique solution λ dans IR+ et que $\lambda \in]0,1[$

2/ Montrer que $\lambda \notin Q$

2) $x \in S_{(E)} \longrightarrow x \equiv -1\ [10]$.

réciproquement: $x \equiv -1\ [10] \longrightarrow 2x^4 + x - 1 \equiv 2 - 1 - 1 \equiv 0\ [10]$

d'où $S_E = \{10k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$

NB on aurait pu résoudre directement (E) par le tableau des restes !!

II) 1) posons $f(x) = 2x^4 + x - 1$, $f'(x) = 8x^3 + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f\langle \mathbb{R}_+ \rangle$

et comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $f\langle \mathbb{R}_+ \rangle = [f(0), \lim_{+\infty} f[= [-1, +\infty[$

et puisque $0 \in [-1, +\infty[$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$, unique tq: $f(\lambda) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 2 > 0 \end{array}\right\} \longrightarrow 0 < \lambda < 1.$$

Exercice N°11

I. Soit l'équation dans Z (E): $2x^4 + x - 1 \equiv 0\ [10]$

1/ Soit x une solution de (E)

a/ Montrer que $10 \wedge x = 1$

b/ En déduire que $x \equiv -1\ [10]$

2/ Déterminer l'ensemble des solutions de (E),

II. On considère dans IR+ l'équation

(F): $2x^4 + x - 1 = 0$

1/ Montrer que l'équation (F) admet une unique solution λ dans IR+ et que $\lambda \in]0,1[$

2/ Montrer que $\lambda \notin Q$

2) supposons que $\lambda \in \mathbb{Q}$:

$\lambda \in \mathbb{Q}$ donc il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tq : $\begin{cases} \lambda = p/q \\ p \wedge q = 1. \end{cases}$

$f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \frac{2p^4}{q^4} + p/q - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2p^4 + pq^3 - q^4 = 0$

$\Leftrightarrow p(2p^3 + q^3) = q^4 \quad (1)$

$\Rightarrow p \mid q^4 \Rightarrow p \wedge q^4 = p \Rightarrow p = 1$ car si $p \neq 1$ p admet un diviseur premier p' , $\begin{cases} p' \mid p \\ p \mid q^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p' \mid p \\ p' \mid q^4 \end{cases} \xrightarrow{p' \text{ premier}} \begin{cases} p' \mid p \\ p' \mid q \end{cases} \Rightarrow p' \mid p \wedge q = 1$ abs de

• $p = 1$ donc $(1) \Leftrightarrow 2 + q^3 = q^4 \Leftrightarrow q^3(q-1) = 2$ ce qui est impossible car $q \in \mathbb{N}^*$

$d'où$ $\lambda \notin \mathbb{Q}$.