Exercice N°7

On considère dans ZxZ l'équation (E): $7x^3 - 13y = 5$

1/ Soit $(x,y) \in ZxZ$ une solution de l'équation (E)

a/ Montrer que x et 13 sont premier entre eux.

b/ En déduire que: $x^{12} \equiv 1 \pmod{13}$

c/ Montrer que: $x^3 \equiv 10 \pmod{13}$

d/ En déduire que: $x^{12} \equiv 3 \pmod{13}$

2/ Déduire des questions précédentes que l'équation (E) n'admet pas de solution dans ZxZ

Exercice N°7

On considère dans ZxZ l'équation (E): $7x^3 - 13y = 5$

1/ Soit $(x,y)\in ZxZ$ une solution de l'équation (E)

a/ Montrer que x et 13 sont premier entre eux.

b/ En déduire que: $x^{12} \equiv 1\ (13)$

c/ Montrer que: $x^3 \equiv 10\ (13)$

d/ En déduire que: $x^{12} \equiv 3\ (13)$

2/ Déduire des questions précédentes que l'équation (E) n'admet pas de solution dans ZxZ

1) a) 13 est premier donc $x \wedge 13 = 1$ ou $x \wedge 13 = 13$.

supposons $x \wedge 13 = 13$

$x \wedge 13 = 13 \rightarrow 13$ divise $x \rightarrow x \equiv 0\,[13] \rightarrow x^3 \equiv 0\,[13]$

$\rightarrow 7x^3 \equiv 0\,[13]$

or $7x^3 - 13y = 5 \rightarrow 7x^3 \equiv 5\,[13]$

Alors $5 \equiv 0\,[13] \rightarrow 13$ divise 5 ce qui est absurde

donc $x \wedge 13 = 1$

b) $x \wedge 13 = 1 \rightarrow 13$ ne divise pas x

$\left.\begin{array}{l}13 \text{ premier}\\ 13 \text{ ne divise pas } x\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Fermat}} x^{12} \equiv 1\,[13]$

Exercice N°7

On considère dans ZxZ l'équation (E): $7x^3 - 13y = 5$

1/ Soit $(x,y)\in ZxZ$ une solution de l'équation (E)

a/ Montrer que x et 13 sont premier entre eux.

b/ En déduire que: $x^{12} \equiv 1\ (13)$

c/ Montrer que: $x^3 \equiv 10\ (13)$

d/ En déduire que: $x^{12} \equiv 3\ (13)$

2/ Déduire des questions précédentes que l'équation (E) n'admet pas de solution dans ZxZ

c) $7x^3 - 13y = 5 \longrightarrow 7x^3 \equiv 5\ [13]$

$\xrightarrow{\times 2} 14x^3 \equiv 10\ [13] \longrightarrow x^3 \equiv 10\ [13]$ car $14 \equiv 1\ [13]$

d) $x^3 \equiv 10 \equiv -3\ [13] \longrightarrow (x^3)^4 \equiv (-3)^4\ [13]$

$\longrightarrow x^{12} \equiv 81\ [13]$ or $81 = 13\times 6 + 3 \equiv 3\ [13]$

donc $x^{12} \equiv 3\ [13]$

e) $\left.\begin{array}{l} b) \longrightarrow x^{12} \equiv 1\ [13] \\ d) \longrightarrow x^{12} \equiv 3\ [13] \end{array}\right\} \longrightarrow 3 \equiv 1\ [13]$

$\longrightarrow 13$ divise $3 - 1 = 2$ absurde

donc l'eq: (E) n'a pas de solution ds $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

cd: $S_{(E)} = \emptyset$

Exercice N°8

On considère la suite U définie sur IN par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 10U_n + 21$

1/ a/ Montrer que $3U_n = 10^{n+1} - 7$

b/ En déduire l'écriture décimale de U_n

c/ Montrer alors que U_2 est un nombre premier.

2/ a/ Montrer que $\forall n \in IN$, $3U_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$

b/ En déduire que $U_n = 5 - 4(-1)^n \pmod{11}$

c/ Vérifier que U_n n'est pas divisible par 11.

3/ a/ Montrer que $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$

b/ En déduire que $\forall k \in IN$, $U_{16k+8} \equiv 0 \pmod{17}$

4/ a/ Montrer que $\forall n \in IN$, 10^{n+1} n'est pas divisible par 7.

b/ En déduire que U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.

On considère la suite U définie sur IN par

$U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 10U_n + 21$

1/ a/ Montrer que $3U_n = 10^{n+1} - 7$

b/ En déduire l'écriture décimale de U_n

c/ Montrer alors que U_2 est un nombre premier.

2/ a/ Montrer que $\forall n \in IN$, $3U_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$

b/ En déduire que $U_n = 5 - 4(-1)^n \pmod{11}$

c/ Vérifier que U_n n'est pas divisible par 11.

1) a) 1° idée : récurrence (simple)

2° idée posons $V_n = 3U_n + 7$.

$$V_{n+1} = 3U_{n+1} + 7$$
$$= 3(10U_n + 21) + 7$$
$$= 30U_n + 70 = 10V_n$$

→ (V_n) est géométrique de raison $q = 10$

→ $V_n = V_0 \times 10^n$ or $V_0 = 3U_0 + 7 = 10$ donc $V_n = 10^{n+1}$ → $\boxed{3U_n = 10^{n+1} - 7}$

b) $3U_n = 10^{n+1} - 7 = 10^{n+1} - 10 + 3 = 10(10^n - 1) + 3$

$$= 10 \times 9(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}) + 3$$

→ $U_n = 3(10 + 10^2 + \dots + 10^n) + 1$ → $U_n = \underbrace{33\dots3}_{n \text{ fois}}1$.

c) $U_2 = 331$ $\sqrt{331} \simeq 18,\dots$

d	2	3	5	7	11	13	17
r	1	1	1	2	1	6	8

→ U_2 est premier.

On considère la suite U définie sur IN par
$U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 10U_n + 21$
1/ a/ Montrer que $3U_n = 10^{n+1} - 7$
b/ En déduire l'écriture décimale de U_n
c/ Montrer alors que U_2 est un nombre premier.
2/ a/ Montrer que $\forall n \in IN$, $3U_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$
b/ En déduire que $U_n = 5 - 4(-1)^n \pmod{11}$
c/ Vérifier que U_n n'est pas divisible par 11.
3/ a/ Montrer que $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$
b/ En déduire que $\forall k \in IN$, $U_{16k+8} \equiv 0 \pmod{17}$
4/ a/ Montrer que $\forall n \in IN$, 10^{n+1} n'est pas divisible par 7.
b/ En déduire que U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.

2) a) $3U_n = 10^{n+1} - 7$

$= 10^{n+1} + 4 - 11$

$\equiv (-1)^{n+1} + 4 \, [11]$ car $10 \equiv -1 \, [11]$

$\longrightarrow 3U_n \equiv 4 - (-1)^n \, [11]$

b) $3U_n \equiv 4 - (-1)^n \, [11] \xrightarrow{\times 4}$

$12U_n \equiv 16 - 4(-1)^n \, [11]$ or $12 \equiv 1 \, [11]$ et $16 \equiv 5 \, [11]$

Alors $U_n \equiv 5 - 4(-1)^n \, [11]$

c) $U_n \equiv 5 - 4(-1)^n \equiv \begin{cases} 5 - 4 \equiv 1 \, [11] \text{ si } n \text{ est pair} \\ 5 + 4 \equiv 9 \, [11] \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ $\longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, U_n n'est pas divisible par 11.

On considère la suite U définie sur IN par
$U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 10U_n + 21$
1/ a/ Montrer que $3U_n = 10^{n+1} - 7$
b/ En déduire l'écriture décimale de U_n
c/ Montrer alors que U_2 est un nombre premier.
2/ a/ Montrer que $\forall n \in IN$, $3U_n \equiv 4 - (-1)^n$ (mod11)
b/ En déduire que $U_n = 5 - 4(-1)^n$ (mod11)
c/ Vérifier que U_n n'est pas divisible par 11.
3/ a/ Montrer que $10^{16} \equiv 1$ (mod17)
b/ En déduire que $\forall k \in IN$, $U_{16k+8} \equiv 0$ (mod17)
4/ a/ Montrer que $\forall n \in IN$, 10^{n+1} n'est pas divisible par 7.
b/ En déduire que U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.

3/a/ 17 premier
17 ne divise pas 10 } $\xrightarrow{\text{Fermat}}$ $10^{16} \equiv 1 \,[17]$

b) $3U_{16k+8} = 10^{16k+9} - 7$

$= (10^{6})^k \times (10^2)^4 \times 10 - 7$

$\equiv 1 \times (-2)^4 \times 10 - 7 \,[17]$

$\equiv 16 \times 10 - 7 \equiv -1 \times 10 - 7 \equiv -17 \equiv 0 \,[17]$.

$3U_{16k+8} \equiv 0 \,[17) \xrightarrow{\times 6} 18U_{16k+8} \equiv 0 \,[17]$

$\xrightarrow{18 \equiv 1 [17]} U_{16k+8} \equiv 0 \,[17]$

On considère la suite U définie sur IN par
$U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 10U_n + 21$
1/ a/ Montrer que $3U_n = 10^{n+1} - 7$
b/ En déduire l'écriture décimale de U_n
c/ Montrer alors que U_2 est un nombre premier.
2/ a/ Montrer que $\forall n \in IN, 3U_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$
b/ En déduire que $U_n = 5 - 4(-1)^n \pmod{11}$
c/ Vérifier que U_n n'est pas divisible par 11.
3/ a/ Montrer que $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$
b/ En déduire que $\forall k \in IN, U_{16k+8} \equiv 0 \pmod{17}$
4/ a/ Montrer que $\forall n \in IN, 10^{n+1}$ n'est pas divisible par 7.
b/ En déduire que U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.

4/ a) 1ère idée : $10 \equiv 3 [7] \to 10^{n+1} \equiv 3^{n+1} [7]$

or $3^{n+1} \wedge 7 = 1$ donc $3^{n+1} \not\equiv 0 [7] \to 10^{n+1} \not\equiv 0 [7]$

$\to 10^{n+1}$ n'est pas divisible par 7.

2ème idée : $\begin{cases} 10^{n+1} = 2^{n+1} \times 5^{n+1} \\ 7 = 7^1 \end{cases} \to 7 \wedge 10^{n+1} = 1$

$\to 10^{n+1}$ n'est pas divisible par 7

b) $U_{n+1} = 10U_n + 21 \Leftrightarrow U_{n+1} - 10U_n = 21 \xrightarrow{d = U_n \wedge U_{n+1}} d$ divise 21

$\to d \in \{1, 3, 7, 21\}$

• si $d = 7$ alors $U_n \equiv 0 [7] \to 3U_n \equiv 0 [7] \to 10^{n+1} - 7 \equiv 0 [7] \to 10^{n+1} \equiv 0 [7]$

ce qui contredit le résultat a/ $\to d \neq 7 \to d \neq 21$

• D'autre part $U_n = 33...31 \equiv 1 (3) \to d \neq 3$

d'où $d = 1 \to U_n \wedge U_{n+1} = 1$