Exercice N°3

Le but de cet exercice et de déterminer les entiers naturels premiers p et q qui vérifient la relation ® $4^q \equiv 1\ [p]$ et $4^p \equiv 1\ [q]$

1/ Dans cette question on suppose que $p = q$

a/ Montrer que $p \wedge 4 = 1$

b/ Montrer que $4^{p-1} \equiv 1\ [p]$, en déduire que $p = 3$

2/ Dans cette question on suppose que $p \neq q$ et on prend $p<q$

a/ Montrer que $4^{p-1} \equiv 1\ [p]$

b/ On pose d le plus petit entier naturel non nul tel que $4^d \equiv 1\ [p]$.

Montrer que d divise $(p – 1)$ et d divise q

(Utiliser le reste de la division euclidienne de $p – 1$ et de q par d)

c/ Montrer que $(p – 1) \wedge q = 1$, en déduire que $d = 1$

d/ En déduire que $p = 3$ et que $q = 7$

e/ En déduire tous les entiers naturels premiers p et q qui vérifient la relation ®

Exercice N°3

Le but de cet exercice et de déterminer les entiers naturels premiers p et q qui vérifient la relation ® $4^q \equiv 1 [p]$ et $4^p \equiv 1 [q]$

1/ Dans cette question on suppose que $p = q$

a/ Montrer que $p \wedge 4 = 1$

b/ Montrer que $4^{p-1} \equiv 1 [p]$, en déduire que $p = 3$

2/ Dans cette question on suppose que $p \neq q$ et on prend $p < q$

a/ Montrer que $4^{p-1} \equiv 1 [p]$

b/ On pose d le plus petit entier naturel non nul tel que $4^d \equiv 1 [p]$.

Montrer que d divise $(p – 1)$ et d divise q (Utiliser le reste de la division euclidienne de $p – 1$ et de q par d)

c/ Montrer que $(p–1) \wedge q = 1$, en déduire que $d=1$

d/ En déduire que $p = 3$ et que $q = 7$

e/ En déduire tous les entiers naturels premiers p et q qui vérifient la relation ®

1) a) $p \wedge 4 \in D_4 = \{1, 2, 4\}$

si $p \wedge 4 \neq 1$ alors 2 divise p.

$4^p \equiv 1 [p] \Leftrightarrow 4^p = 1 + kp \Leftrightarrow 4^p - kp = 1$

$\left.\begin{array}{l} 2 \mid p \\ 2 \mid 4^p \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \mid 4^p - kp = 1 \Rightarrow 2 \mid 1$ absurde

donc $p \wedge 4 = 1$

2ème idée : p premier donc $p \wedge 4 = p$ ou $p \wedge 4 = 1$

supposons que $p \wedge 4 = p$ alors $p \mid 4 \Rightarrow 4 \equiv 0 [p]$

$\Rightarrow 4^p \equiv 0 [p]$ or $4^p \equiv 1 [p]$

$\Rightarrow 1 \equiv 0 [p] \Rightarrow p \mid 1 \Rightarrow p = 1$ absurde

donc $p \wedge 4 = 1$

3ème idée : $4^p \equiv 1 [p] \Rightarrow 4^p - kp = 1$

$\Leftrightarrow 4 \times 4^{p-1} - kp = 1 \xrightarrow{\text{Bezout}} 4 \wedge p = 1$

Exercice N°3

b) $\left.\begin{array}{l} p \text{ premier} \\ p \text{ ne divise pas } 4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Fermat}} 4^{p-1} \equiv 1 [p]$

$\left.\begin{array}{l} 4^p \equiv 1 [p] \\ 4^{p-1} \equiv 1 [p] \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4^p \equiv 1 [p] \\ 4^p \equiv 4 [p] \end{array}\right.$

$\longrightarrow 4 \equiv 1 [p] \Rightarrow p \mid 3 \xrightarrow{p \text{ premier}} p = 3$

2) a) $4^q \equiv 1 [p] \Rightarrow 4^q = 1 + kp \, , k \in \mathbb{Z}$

$\longrightarrow 4 \times 4^{q-1} - kp = 1 \quad (q-1 > 0)$

$\xrightarrow{\text{Bezout}} 4 \wedge p = 1 \longrightarrow p$ ne divise pas 4.

$\left\{\begin{array}{l} p \text{ premier} \\ p \text{ ne divise pas } 4 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{Fermat}} 4^{p-1} \equiv 1 [p]$

Le but de cet exercice et de déterminer les entiers naturels premiers p et q qui vérifient la relation ® $4^q \equiv 1 [p]$ et $4^p \equiv 1 [q]$

1/ Dans cette question on suppose que p = q

a/ Montrer que $p \wedge 4 = 1$

b/ Montrer que $4^{p-1} \equiv 1 [p]$, en déduire que p= 3

2/ Dans cette question on suppose que $p \neq q$ et on prend $p < q$

a/ Montrer que $4^{p-1} \equiv 1 [p]$

b/ On pose d le plus petit entier naturel non nul tel que $4^d \equiv 1 [p]$.

Montrer que d divise (p – 1) et d divise q (Utiliser le reste de la division euclidienne de p – 1 et de q par d)

c/ Montrer que $(p-1) \wedge q = 1$, en déduire que d=1

d/ En déduire que p = 3 et que q = 7

e/ En déduire tous les entiers naturels premiers p et q qui vérifient la relation ®

Exercice N°3

b) • posons $p-1=dk+r$, $0\leq r<d$

$4^{p-1}\equiv 1[p] \Leftrightarrow 4^{dk+r}\equiv 1[p]$

$\Leftrightarrow (4^d)^k \times 4^r \equiv 1[p] \xleftrightarrow{4^d\equiv 1[p]} 4^r\equiv 1[p]$

donc si $r\neq 0$ alors on a : $4^r\equiv 1[p]$ et $r<d$

ce qui contredit le fait que d est le plus petit entier naturel non nul vérifiant $4^d\equiv 1[p]$

$\Rightarrow r=0 \Rightarrow p-1=dk \Rightarrow d$ divise $p-1$

Le but de cet exercice et de déterminer les entiers naturels premiers p et q qui vérifient la relation ® $4^q\equiv 1$ [p] et $4^p\equiv 1$ [q]

1/ Dans cette question on suppose que p = q

a/ Montrer que $p\wedge 4 = 1$

b/ Montrer que $4^{p-1}\equiv 1$ [p], en déduire que p= 3

2/ Dans cette question on suppose que $p\neq q$ et on prend $p<q$

a/ Montrer que $4^{p-1}\equiv 1$ [p]

b/ On pose d le plus petit entier naturel non nul tel que $4^d\equiv 1$ [p].

Montrer que d divise (p – 1) et d divise q

(Utiliser le reste de la division euclidienne de p-1 et de q par d)

c/ Montrer que $(p-1)\wedge q = 1$, en déduire que d=1

d/ En déduire que p = 3 et que q = 7

e/ En déduire tous les entiers naturels premiers p et q qui vérifient la relation ®

Exercice N°3

Le but de cet exercice et de déterminer les entiers naturels premiers p et q qui vérifient la relation ® $4^q \equiv 1\ [p]$ et $4^p \equiv 1\ [q]$

1/ Dans cette question on suppose que p = q

a/ Montrer que $p \wedge 4 = 1$

b/ Montrer que $4^{p-1} \equiv 1\ [p]$, en déduire que p= 3

2/ Dans cette question on suppose que $p \neq q$ et on prend $p<q$

a/ Montrer que $4^{p-1} \equiv 1\ [p]$

b/ On pose d le plus petit entier naturel non nul tel que $4^d \equiv 1\ [p]$.

Montrer que d divise (p – 1) et d divise q (Utiliser le reste de la division euclidienne de p – 1 et de q par d)

c/ Montrer que $(p-1)\wedge q = 1$, en déduire que d=1

d/ En déduire que p = 3 et que q = 7

e/ En déduire tous les entiers naturels premiers p et q qui vérifient la relation ®

• posons $q = kd + r$ avec $0 \leq r < d$.

$4^q \equiv 1\ [p] \Longleftrightarrow 4^{kd+r} \equiv 1\ [p]$

$\Longleftrightarrow (4^d)^k \times 4^r \equiv 1\ [p] \Longleftrightarrow 4^r \equiv 1\ [p]$

donc si $r \neq 0$ alors r sera un entier naturel non nul $< d$ qui vérifie $4^r \equiv 1\ [p]$

ce qui contredit le fait que d est le plus petit.

donc $r = 0 \longrightarrow q = kd \longrightarrow$ d divise q

Exercice N°3

c) q est premier donc $(p-1)\wedge q = 1$ ou $(p-1)\wedge q = q$.

si $(p-1)\wedge q = q$ alors q divise $p-1 \rightarrow q \leq p-1$

or $p-1 < p < q$ donc $q < q$ ce qui est absurde

donc $(p-1)\wedge q = 1$

$\left.\begin{array}{l} d \mid q \\ d \mid p-1 \end{array}\right\} \rightarrow d \mid (p-1)\wedge q = 1 \xrightarrow{d \in \mathbb{N}} d = 1$

d) $d = 1 \rightarrow 4 \equiv 1\ [p] \rightarrow p \mid 3 \xrightarrow{p \text{ premier}} p = 3$

$4^p \equiv 1\ [q] \longrightarrow 4^3 \equiv 1\ [q] \rightarrow q \mid 63$

$\Rightarrow q \in \{1, 3, 7, 21, 63\}$ or q premier et $q > p = 3$

donc $q = 7$

Le but de cet exercice et de déterminer les entiers naturels premiers p et q qui vérifient la relation ® $4^q \equiv 1\ [p]$ et $4^p \equiv 1\ [q]$

1/ Dans cette question on suppose que $p = q$

a/ Montrer que $p \wedge 4 = 1$

b/ Montrer que $4^{p-1} \equiv 1\ [p]$, en déduire que $p = 3$

2/ Dans cette question on suppose que $p \neq q$ et on prend $p < q$

a/ Montrer que $4^{p-1} \equiv 1\ [p]$

b/ On pose d le plus petit entier naturel non nul tel que $4^d \equiv 1\ [p]$.

Montrer que d divise $(p – 1)$ et d divise q (Utiliser le reste de la division euclidienne de $p – 1$ et de q par d)

c/ Montrer que $(p–1)\wedge q = 1$, en déduire que $d=1$

d/ En déduire que $p = 3$ et que $q = 7$

e/ En déduire tous les entiers naturels premiers p et q qui vérifient la relation ®

Exercice N°3

es d'après ce qui précède (p,q) solution de $(R) \longrightarrow p=q=3$ ou $\begin{cases} p=3 \text{ et } q=7 \\ \text{ou} \\ p=7 \text{ et } q=3. \end{cases}$

réciproquement:

- pour $p=q=3$: $4^3 = 64 \equiv 1\ [3] \rightarrow$ vraie.
- pour $p=3$ et $q=7$: $\begin{cases} 4^7 \equiv 1^7 \equiv 1\ [3] \\ 4^3 = 64 = 7\times 9+1 \equiv 1\ [7] \end{cases}$

d'où $S_{(p,q)} = \{(3,3);(3,7);(7,3)\}$

Le but de cet exercice et de déterminer les entiers naturels premiers p et q qui vérifient la relation ® $4^q \equiv 1\ [p]$ et $4^p \equiv 1\ [q]$

1/ Dans cette question on suppose que p = q

a/ Montrer que $p \wedge 4 = 1$

b/ Montrer que $4^{p-1} \equiv 1\ [p]$, en déduire que p= 3

2/ Dans cette question on suppose que $p \neq q$ et on prend $p<q$

a/ Montrer que $4^{p-1} \equiv 1\ [p]$

b/ On pose d le plus petit entier naturel non nul tel que $4^d \equiv 1\ [p]$.

Montrer que d divise (p – 1) et d divise q (Utiliser le reste de la division euclidienne de p – 1 et de q par d)

c/ Montrer que $(p-1) \wedge q = 1$, en déduire que d=1

d/ En déduire que p = 3 et que q = 7

e/ En déduire tous les entiers naturels premiers p et q qui vérifient la relation ®

Exercice N°4

PartieI **On considère dans ZxZ l'équation (E) : $47x - 43y = 1$**

1/ Vérifier que le couple (11,12) est une solution particulière de l'équation (E)

2/ Résoudre dans ZxZ l'équation (E)

Partie II **On considère dans Z l'équation (F) : $x^{41} \equiv 4\ [43]$**

1/ Soit $x \in Z$ une solution de l'équation (F)

a/ Montrer que x et 43 sont premier entre eux, en déduire que : $x^{42} \equiv 1\ [43]$

b/ Montrer que $4x \equiv 1\ [43]$, en déduire que : $x \equiv 11\ [43]$

2/ Donner l'ensemble des solutions dans Z de l'équation (F)

Partie III **On considère dans Z le système à deux équations suivant** $(S): \begin{cases} x^{41} \equiv 4 \quad [43] \\ x^{47} \equiv 10 \quad [47] \end{cases}$

1/ Soit x une solution du système (S)

a/ Montrer que x est solution du système $(S'): \begin{cases} x \equiv 11\ [43] \\ x \equiv 10\ [47] \end{cases}$

b/ En déduire que $x \equiv 527\ [2021]$ (On pourra utiliser la partie I)

2/ Donner l'ensemble des solutions dans Z du système (S).

Exercice N°4

Partie I :

$47x - 43y = 1$

$\begin{cases} x = 43k + 11 \\ y = 47k + 12 \end{cases}$

1) $47 \times 11 - 43 \times 12 = 11(47 - 43) - 43$

$= 44 - 43 = 1$

donc $(11, 12) \in S_E$.

2) $(x, y) \in S_E \Leftrightarrow 47x - 43y = 47 \times 11 - 43 \times 12$

$\Leftrightarrow 47(x - 11) = 43(y - 12)$ (I)

$\left.\begin{matrix} 43 \mid 47(x - 11) \\ 43 \wedge 47 = 1 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{Gauss}} 43 \mid x - 11$

$\Rightarrow x - 11 = 43k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 43k + 11$

(I) $\Leftrightarrow 47 \times 43k = 43(y - 12)$

$\Leftrightarrow y = 47k + 12$

Prof: Chouihi.L

Partie I

On considère dans ZxZ l'équation (E) : 47x – 43y = 1

1/ Vérifier que le couple (11,12) est une solution particulière de l'équation (E)

2/ Résoudre dans ZxZ l'équation (E)

Partie II

On considère dans Z l'équation (F) : $x^{41} \equiv 4$ [43]

1/ Soit x∊Z une solution de l'équation (F)

a/ Montrer que x et 43 sont premier entre eux, en déduire que : $x^{42} \equiv 1$ [43]

b/ Montrer que $4x \equiv 1$[43], en déduire que : $x \equiv 11$ [43]

2/ Donner l'ensemble des solutions dans Z de l'équation (F)

Partie III **On considère dans Z le système à deux équations suivant** $(S): \begin{cases} x^{41} \equiv 4 \ [43] \\ x^{47} \equiv 10 \ [47] \end{cases}$

1/ Soit x une solution du système (S)

a/ Montrer que x est solution du système

$(S'): \begin{cases} x \equiv 11 \ [43] \\ x \equiv 10 \ [47] \end{cases}$

b/ En déduire que $x \equiv 527$ [2021] (On pourra utiliser la partie I)

2/ Donner l'ensemble des solutions dans Z du système (S)

Exercice N°4

réciproquement: $47(43k+11)-43(47k+12)=$
$47\times 11-43\times 12=1$

cl: $S_E=\{(43k+11,47k+12);k\in\mathbb{Z}\}$.

Partie II : $(F): x^{41}\equiv 4\,[43]$

1) a) 43 est premier donc $x\wedge 43=1$ ou $x\wedge 43=43$.

si $x\wedge 43=43$ alors 43 divise x

$\Rightarrow x\equiv 0\,[43] \Rightarrow x^{41}\equiv 0\,[43]$

or $x^{41}\equiv 4\,[43]$ alors $4\equiv 0\,[43]$

$\Rightarrow 43\mid 4$ absurde donc $x\wedge 43=1$

Prof: Chouihi.L

Partie I

On considère dans ZxZ l'équation (E) : $47x-43y=1$

1/ Vérifier que le couple (11,12) est une solution particulière de l'équation (E)

2/ Résoudre dans ZxZ l'équation (E)

Partie II

On considère dans Z l'équation (F) : $x^{41}\equiv 4\,[43]$

1/ Soit $x\in\mathbb{Z}$ une solution de l'équation (F)

a/ Montrer que x et 43 sont premier entre eux, en déduire que : $x^{42}\equiv 1\,[43]$

b/ Montrer que $4x\equiv 1[43]$, en déduire que : $x\equiv 11\,[43]$

2/ Donner l'ensemble des solutions dans Z de l'équation (F)

Partie III On considère dans Z le système à deux équations suivant (S): $\begin{cases} x^{41}\equiv 4 & [43] \\ x^{47}\equiv 10 & [47]\end{cases}$

1/ Soit x une solution du système (S)

a/ Montrer que x est solution du système

(S'): $\begin{cases} x\equiv 11\,[43] \\ x\equiv 10\,[47]\end{cases}$

b/ En déduire que $x\equiv 527\,[2021]$ (On pourra utiliser la partie I)

2/ Donner l'ensemble des solutions dans Z du système (S)

Exercice N°4

$x \wedge 43 = 1 \longrightarrow 43$ ne divise pas x.

$\left.\begin{array}{l} 43 \text{ premier} \\ 43 \text{ ne divise pas } x \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Fermat}} x^{42} \equiv 1\,[43]$

b) $x^{41} \equiv 4\,[43] \xrightarrow{\times x} x^{42} \equiv 4x\,[43]$

or $x^{42} \equiv 1\,[43]$ alors $4x \equiv 1\,[43]$

$4x \equiv 1\,[43] \xrightarrow{\times 11} 44x \equiv 11\,[43]$

$\longrightarrow x \equiv 11\,[43]$ (car $44 \equiv 1\,[43]$)

2) d'après ce qui précède $x \in S_F \longrightarrow x \equiv 11\,[43]$

réciproquement : $x \equiv 11\,[43] \longrightarrow x^{41} \equiv 11^{41}\,[43]$

or $\left.\begin{array}{l} 43 \text{ premier} \\ 43 \nmid 11 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Fermat}} 11^{42} \equiv 1\,[43]$

Prof: Chouihi.L

Partie I

On considère dans ZxZ l'équation (E) : $47x - 43y = 1$

1/ Vérifier que le couple (11,12) est une solution particulière de l'équation (E)

2/ Résoudre dans ZxZ l'équation (E)

Partie II

On considère dans Z l'équation (F) : $x^{41} \equiv 4\,[43]$

1/ Soit $x \in Z$ une solution de l'équation (F)

a/ Montrer que x et 43 sont premier entre eux, en déduire que : $x^{42} \equiv 1\,[43]$

b/ Montrer que $4x \equiv 1[43]$, en déduire que : $x \equiv 11\,[43]$

2/ Donner l'ensemble des solutions dans Z de l'équation (F)

Partie III On considère dans Z le système à deux équations suivant (S): $\begin{cases} x^{41} \equiv 4 \;\; [43] \\ x^{47} \equiv 10 \;\; [47] \end{cases}$

1/ Soit x une solution du système (S)

a/ Montrer que x est solution du système

(S'): $\begin{cases} x \equiv 11\,[43] \\ x \equiv 10\,[47] \end{cases}$

b/ En déduire que $x \equiv 527\,[2021]$ (On pourra utiliser la partie I)

2/ Donner l'ensemble des solutions dans Z du système (S)

Exercice N°4

$\longrightarrow 11 \times 11^{41} \equiv 1\ [43]$

$\xrightarrow{\times 4} 44 \times 11^{41} \equiv 4\ [43]$

$\longrightarrow 11^{41} \equiv 4\ [43]$ ($44 \equiv 1\ [43]$.

$\longrightarrow x \in S_F$.

ccl : $S_F = \{43k + 11,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Partie III :

1) a) $x^{41} \equiv 4\ [43] \xrightarrow{\text{Partie II}} x \equiv 11\ [43]$.

47 est premier $\xrightarrow{\text{fermat}} x^{47} \equiv x\ [47]$

alors: $x^{47} \equiv 10\ [47] \Longleftrightarrow x \equiv 10\ [47]$

d'où x sol de (S') : $\begin{cases} x \equiv 11\ [43] \\ x \equiv 10\ [47] \end{cases}$

Prof: Chouihi.L

Partie I

On considère dans ZxZ l'équation (E) : $47x - 43y = 1$

1/ Vérifier que le couple (11,12) est une solution particulière de l'équation (E)

2/ Résoudre dans ZxZ l'équation (E)

Partie II

On considère dans Z l'équation (F) : $x^{41} \equiv 4\ [43]$

1/ Soit $x \in Z$ une solution de l'équation (F)

a/ Montrer que x et 43 sont premier entre eux, en déduire que : $x^{42} \equiv 1\ [43]$

b/ Montrer que $4x \equiv 1[43]$, en déduire que : $x \equiv 11\ [43]$

2/ Donner l'ensemble des solutions dans Z de l'équation (F)

Partie III On considère dans Z le système à deux équations suivant (S): $\begin{cases} x^{41} \equiv 4\ \ [43] \\ x^{47} \equiv 10\ \ [47] \end{cases}$

1/ Soit x une solution du système (S)

a/ Montrer que x est solution du système

(S'): $\begin{cases} x \equiv 11\ [43] \\ x \equiv 10\ [47] \end{cases}$

b/ En déduire que $x \equiv 527\ [2021]$ (On pourra utiliser la partie I)

2/ Donner l'ensemble des solutions dans Z du système (S)

Exercice N°4

b) $S' \Leftrightarrow \begin{cases} x = 43a + 11 \\ x = 47b + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 43a + 11 \\ 47b - 43a = 1 \end{cases}$

$\xrightarrow{I/2)} \begin{cases} x = 43(47k+12) + 11 \\ a = 47k + 12 \end{cases}$

$\longrightarrow x = 2021k + 527 \longrightarrow x \equiv 527 \; [2021]$

2) d'après ce qui précède $x \in S_{(S)} \Longrightarrow x \equiv 527 \, [2021]$

réciproquement :

$x = 2021k + 527 \longrightarrow \begin{cases} x = 43(47k+12) + 11 \equiv 11 \, [43] \\ x = 47(43k+11) + 10 \equiv 10 \, [47] \end{cases}$

cl : $S_{\mathbb{Z}} = \{ 2021k + 527, \, k \in \mathbb{Z} \}$

Partie I

On considère dans ZxZ l'équation (E) : $47x - 43y = 1$

1/ Vérifier que le couple (11,12) est une solution particulière de l'équation (E)

2/ Résoudre dans ZxZ l'équation (E)

Partie II

On considère dans Z l'équation (F) : $x^{41} \equiv 4 \; [43]$

1/ Soit $x \in Z$ une solution de l'équation (F)

a/ Montrer que x et 43 sont premier entre eux, en déduire que : $x^{42} \equiv 1 \; [43]$

b/ Montrer que $4x \equiv 1[43]$, en déduire que : $x \equiv 11 \; [43]$

2/ Donner l'ensemble des solutions dans Z de l'équation (F)

Partie III On considère dans Z le système à deux équations suivant $(S) : \begin{cases} x^{41} \equiv 4 \;\; [43] \\ x^{47} \equiv 10 \;\; [47] \end{cases}$

1/ Soit x une solution du système (S)

a/ Montrer que x est solution du système

$(S') : \begin{cases} x \equiv 11 \; [43] \\ x \equiv 10 \; [47] \end{cases}$

b/ En déduire que $x \equiv 527 \; [2021]$ (On pourra utiliser la partie I)

2/ Donner l'ensemble des solutions dans Z du système (S)