Exercice N°1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1/ a/ Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est pair

b/ Déterminer les valeurs de n pour lesquelles : $a_n \equiv 0\ [3]$

2/ Soit p un nombre premier tel que $p > 3$.

a/ Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et $3^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et $6^{p-1} \equiv 1\ [p]$

b/ Montrer que p divise a_{p-2}

c/ Montrer que pour tout entier naturel premier q, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $a_n \wedge q = q$

Exercice N°1

Pour tout n□IN*, on pose

$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1/ a/ Vérifier que pour tout n□IN*, a_n est pair

b/ Déterminer les valeurs de n pour lesquelles : a_n □ 0 [3]

2/Soit p un nombre premier tel que p> 3

a/ Montrer que : 2^{p-1} □ 1 [p] et 3^{p-1} □ 1 [p] et 6^{p-1} □ 1 [p]

b/ Montrer que p divise a_{p-2}

c/ Montrer que pour tout entier naturel premier q, il existe n□IN* tel que : $a_n \wedge q = q$

1) a) $\left.\begin{array}{l} 2 \equiv 0\,[2] \\ 3 \equiv 1\,[2] \\ 6 \equiv 0\,[2] \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2^n \equiv 0\,[2] \\ 3^n \equiv 1\,[2] \\ 6^n \equiv 0\,[2] \end{array}\right.$ $\longrightarrow a_n \equiv 0+1+0-1 \equiv 0\,[2]$ $\longrightarrow a_n$ est pair

b) $a_n \equiv (-1)^n + 0 + 0 - 1 \equiv (-1)^n - 1 \quad [3]$

$\equiv \begin{cases} 0\,[3] & \text{si } n \text{ pair} \\ -2 \equiv 1\,[3] & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

cl : $a_n \equiv 0\ [3] \Longleftrightarrow n$ est pair $\Longleftrightarrow n = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*$

2) (p premier et $p > 3$) $\longrightarrow$ p ne divise pas 2, 3 et 6

donc, d'après Fermat ;

$2^{p-1} \equiv 1\,[p]$, $3^{p-1} \equiv 1\,[p]$ et $6^{p-1} \equiv 1\,[p]$.

Exercice N°1

Pour tout n□IN*, on pose

$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1/ a/ Vérifier que pour tout n□IN*, a_n est pair

b/ Déterminer les valeurs de n pour lesquelles : a_n □ 0 [3]

2/Soit p un nombre premier tel que p> 3

a/ Montrer que : 2^{p-1} □ 1 [p] et 3^{p-1} □ 1 [p] et 6^{p-1} □ 1 [p]

b/ Montrer que p divise a_{p-2}

c/ Montrer que pour tout entier naturel premier q, il existe n□IN* tel que : $a_n \wedge q = q$

b) $6a_{p-2} = 3\times 2^{p-1} + 2\times 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$

$\equiv 3\times 1 + 2\times 1 + 1 - 6 \; [p]$

$\equiv 0 \; [p] \longrightarrow p$ divise $6a_{p-2}$.

p divise $6a_{p-2}$

$6\wedge p = 1$ $\longrightarrow$ p divise a_{p-2}.

c) <u>pour q = 2</u> a_n est pair donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \wedge 2 = 2$.

<u>pour q = 3</u> : $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_{2k} \equiv 0 [3] \longrightarrow a_{2k} \wedge 3 = 3$.

<u>pour q > 3</u> q divise $a_{q-2} \longrightarrow a_{q-2} \wedge q = q$.

d'où le résultat.

Exercice N°2

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

On considère dans IN² l'équation (E_n) : $(x+1)^n - x^n = ny$

Soit (x,y) une solution de l'équation (E_n) dans IN² et soit p le plus petit diviseur premier de n.

1/ a/ Montrer que $(x+1)^n \equiv x^n\ [p]$

b/ Montrer que p est premier avec x et avec (x+1)

c/ En déduire que $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1}\ [p]$

2/ Montrer que si n est pair alors (E_n) n'admet pas de solution dans IN²

3/ On suppose que n est impair.

a/ Montrer qu'il existe un couple (u,v) de Z² tel que : $nu + (p-1)v = 1$

(on rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)

b/ Soient q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de u par (p – 1). Vérifier que : $nr = 1 - (p-1)(v + nq)$

c/ On pose $v' = -(v + nq)$. Montrer que $v' \geq 0$.

d/ Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans IN².

Exercice N°2

1) a) p divise $n \longrightarrow n \equiv 0\ [p]$

$\longrightarrow ny \equiv 0\ [p] \longrightarrow (x+1)^n - x^n \equiv 0\ [p]$

$\longrightarrow (x+1)^n \equiv x^n\ [p]$

b) p est premier donc $x \wedge p = 1$ ou $x \wedge p = p$.

<u>supposons que $x \wedge p = p$</u>

$x \wedge p = p \longrightarrow p \mid x \longrightarrow x \equiv 0\ [p] \longrightarrow x^n \equiv 0\ [p]$

$\longrightarrow (x+1)^n \equiv 0\ [p] \longrightarrow p \mid (x+1)^n$

$\xrightarrow{p \text{ premier}} p \mid x+1$.

$\left.\begin{array}{l} p \mid x \\ p \mid x+1 \end{array}\right\} \longrightarrow p \mid (x+1) - x = 1 \longrightarrow p = 1$

absurde car p premier.

$\longrightarrow x \wedge p = 1$

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

On considère dans IN² l'équation

$(E_n) : (x+1)^n - x^n = ny$

Soit (x,y) une solution de l'équation (E_n) dans IN² et soit p le plus petit diviseur premier de n.

1/ a/ Montrer que $(x+1)^n$ □ x^n [p]

b/ Montrer que p est premier avec x et avec (x+1)

c/ En déduire que $(x+1)^{p-1}$ □ x^{p-1} [p]

2/ Montrer que si n est pair alors (E_n) n'admet pas de solution dans IN²

3/ On suppose que n est impair.

a/ Montrer qu'il existe un couple (u,v) de Z² tel que : $nu + (p-1)v = 1$

(on rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)

b/ Soient q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de u par (p – 1).

Vérifier que : $nr = 1 - (p-1)(v + nq)$

c/ On pose $v' = -(v + nq)$. Montrer que $v' \geq 0$.

d/ Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans IN².

Exercice N°2

même raisonnement pour $x+1 \longrightarrow (x+1)\wedge p = 1$.

c) $x \wedge p = 1 \Longrightarrow p$ ne divise pas x.

$$\left.\begin{array}{l} p \text{ premier} \\ p \text{ ne divise pas } x \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Fermat}} x^{p-1} \equiv 1\ [p].$$

$(x+1)\wedge p = 1 \longrightarrow p$ ne divise pas $x+1$

$$\left.\begin{array}{l} p \text{ premier} \\ p \text{ ne divise pas } x+1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Fermat}} (x+1)^{p-1} \equiv 1\ [p]$$

$$\longrightarrow \quad (x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1}\ [p]$$

2) n pair $\longrightarrow 2$ divise n or p est le plus petit diviseur premier de n donc $\underline{p=2}$

$(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1}\ [p] \longrightarrow (x+1) \equiv x\ [2]$

$\longrightarrow 1 \equiv 0\ [2] \longrightarrow 2$ divise 1 absurde

donc $S_{E_n} = \emptyset$

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

On considère dans IN² l'équation

$(E_n) : (x+1)^n - x^n = ny$

Soit (x,y) une solution de l'équation (E_n) dans IN² et soit p le plus petit diviseur premier de n.

1/ a/ Montrer que $(x+1)^n$ □ x^n [p]

b/ Montrer que p est premier avec x et avec (x+1)

c/ En déduire que $(x+1)^{p-1}$ □ x^{p-1} [p]

2/ Montrer que si n est pair alors (E_n) n'admet pas de solution dans IN²

3/ On suppose que n est impair.

a/ Montrer qu'il existe un couple (u,v) de Z² tel que : $nu + (p-1)v = 1$

(on rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)

b/ Soient q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de u par (p – 1).

Vérifier que : $nr = 1 - (p-1)(v + nq)$

c/ On pose $v' = -(v + nq)$. Montrer que $v' \geq 0$.

d/ Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans IN².

Exercice N°2

3) n impair $\Longleftrightarrow n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}^*$ (car $n > 1$)

a) si $n \wedge (p-1) \neq 1$ alors il existe un nombre premier $p' \leq p-1 < p$ qui divise n ce qui contredit le fait que p est le plus petit diviseur premier de n

$\longrightarrow n \wedge (p-1) = 1$ alors d'après Bézout il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tq: $nu + (p-1)v = 1$

b) $u = (p-1)q + r$ avec $0 \leq r < p-1$.

donc $nu + (p-1)v = 1 \Longleftrightarrow$

$n(p-1)q + nr + (p-1)v = 1 \Longleftrightarrow$

$nr = 1 - (p-1)(v + nq)$.

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

On considère dans $\mathbb{N}^2$ l'équation

$$(E_n) : (x+1)^n - x^n = ny$$

Soit (x,y) une solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{N}^2$ et soit p le plus petit diviseur premier de n.

1/ a/ Montrer que $(x+1)^n \square x^n$ [p]

b/ Montrer que p est premier avec x et avec (x+1)

c/ En déduire que $(x+1)^{p-1} \square x^{p-1}$ [p]

2/ Montrer que si n est pair alors (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

3/ On suppose que n est impair.

a/ Montrer qu'il existe un couple (u,v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $nu + (p-1)v = 1$

(on rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)

b/ Soient q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de u par (p – 1).

Vérifier que : $nr = 1 - (p-1)(v + nq)$

c/ On pose $v' = -(v + nq)$. Montrer que $v' \geq 0$.

d/ Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.

Exercice N°2

c) $(p-1)(v+nq) = 1 - nr \iff$

$(p-1)v' = nr - 1$.

si $r = 0$ alors $u = (p-1)q$

$\rightarrow n(p-1)q + (p-1)v = 1$

$\rightarrow (p-1)(nq + v) = 1$

$\rightarrow p-1$ divise $1 \rightarrow p-1 = 1 \rightarrow p = 2$

$\rightarrow$ n pair ce qui est absurde donc $r \geq 1$

$\left.\begin{matrix} n \geq 2 \\ r \geq 1 \end{matrix}\right) \rightarrow nr \geq 2 \rightarrow nr - 1 > 0$

$\xrightarrow{p-1>0} (p-1)v' > 0 \rightarrow v' \geq 0$

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.
On considère dans IN² l'équation

$(E_n) : (x+1)^n - x^n = ny$

Soit (x,y) une solution de l'équation (E_n) dans IN² et soit p le plus petit diviseur premier de n.

1/ a/ Montrer que $(x+1)^n$ □ x^n [p]

b/ Montrer que p est premier avec x et avec (x+1)

c/ En déduire que $(x+1)^{p-1}$ □ x^{p-1} [p]

2/ Montrer que si n est pair alors (E_n) n'admet pas de solution dans IN²

3/ On suppose que n est impair.

a/ Montrer qu'il existe un couple (u,v) de Z² tel que : $nu + (p-1)v = 1$

(on rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)

b/ Soient q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de u par (p – 1).
Vérifier que : $nr = 1 - (p-1)(v + nq)$

c/ On pose $v' = -(v + nq)$. Montrer que $v' \geq 0$.

d/ Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans IN².

Exercice N°2

ds. d'après 2/ pour n pair $S_{\mathbb{N}^2} = \emptyset$.

• pour n impair

d'après ce qui précède il existe $(r,v') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$

tel que $nr = 1+(p-1)v'$

D'autre part :

$$(x+1)^n \equiv x^n \; [p] \longrightarrow (x+1)^{nr} \equiv x^{nr} \; [p]$$

$$\longrightarrow (x+1)^{1+(p-1)v'} \equiv x^{1+(p-1)v'} \; [p]$$

$$\longrightarrow (x+1)\left((x+1)^{p-1}\right)^{v'} \equiv x\left(x^{p-1}\right)^{v'} \; [p]$$

$\longrightarrow x+1 \equiv x \; [p]$ car $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1} \equiv 1 \; [p]$

$\longrightarrow 1 \equiv 0 \; [p] \longrightarrow p \mid 1$ absurde

d'où $S_{\mathbb{N}^2} = \emptyset$.

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

On considère dans $\mathbb{N}^2$ l'équation

$$(E_n) : (x+1)^n - x^n = ny$$

Soit (x,y) une solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{N}^2$ et soit p le plus petit diviseur premier de n.

1/ a/ Montrer que $(x+1)^n$ □ x^n [p]

b/ Montrer que p est premier avec x et avec (x+1)

c/ En déduire que $(x+1)^{p-1}$ □ x^{p-1} [p]

2/ Montrer que si n est pair alors (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

3/ On suppose que n est impair.

a/ Montrer qu'il existe un couple (u,v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $nu + (p-1)v = 1$

(on rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)

b/ Soient q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de u par (p – 1).

Vérifier que : $nr = 1 - (p-1)(v + nq)$

c/ On pose $v' = -(v + nq)$. Montrer que $v' \geq 0$.

d/ Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.