L.P. Kairouan	**Devoir de synthèse N°1**	**Prof : Chouihi**
Le : 26 – 01 – 18	**Durée : 2heures**	**Classe : 2SC$_{5+6}$**

Exercice N°1 (5 points)

Soit ABC un triangle rectangle en A inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et tel que : $\widehat{ABC} = 60°$. (Voir figure à compléter et à remettre)

1) a) Montrer que le triangle OAB est équilatéral.
   b) Construire les points $A' = t_{\overrightarrow{OA}}(A)$ et $B' = t_{\overrightarrow{OA}}(B)$
   c) Montrer que OBB'A' est un trapèze isocèle.
2) a) Construire le cercle $\mathscr{C}$' image du cercle $\mathscr{C}$ par la translation $t_{\overrightarrow{OA'}}$
   b) Montrer que B'$\in\mathscr{C}$'.
3) a) La droite (BB') recoupe le cercle $\mathscr{C}$' en E.
   Montrer que $t_{\overrightarrow{OA'}}(B) = E$
   b) La droite (EA') recoupe le cercle $\mathscr{C}$' en F.
   Montrer que $t_{\overrightarrow{OA'}}(C) = F$
4) Soit M un point variable du cercle $\mathscr{C}$ distinct de C et N le point tel que CFNM est un parallélogramme. Déterminer l'ensemble des points N lorsque M varie.

Exercice N°2 (6 points)

On pose $P(x) = x^3 + 8x^2 + 17x + 10$; $Q(x) = x^3 + 12x^2 + 47x + 60$ et

$$f(x) = \frac{x^3 + 8x^2 + 17x + 10}{x^3 + 12x^2 + 47x + 60}$$

1) a) La fonction f est elle définie en (-4) ?
   b) Factoriser alors Q(x).
2) a) Calculer P(3) et P(-5).
   b) En déduire une factorisation de P(x).
3) En déduire le domaine de définition D_f de f et que pour tout $x\in D_f$,
   $$f(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}$$
4) Trouver le domaine de définition D_g de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{f(x)}$
5) Pour tout entier naturel n, on pose :
   $$R(n) = \frac{(n+4)f(n)}{(n+1)} \quad \text{et} \quad U(n) = R(0)\times R(1)\times R(2)\times\ldots\times R(n)$$
   a) Montrer que $U(n) = \frac{2}{n+3}$
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $U(n) \le \frac{2}{3}$.

Exercice N°3 (3 points)

On pose $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$.

1) Factoriser P(x).
2) Montrer que pour tout réel x, $P(x + 1) - P(x) = 4x^3$.
3) En déduire que pour tout entier naturel non nul n,
   $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exercice N°4 (6 points)

NB : Les questions 1), 2), 3), 4) et 5) de cet exercice sont indépendantes.

1) Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier 5x183y soit divisible par 4 et 11.
2) Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier 7x489y soit divisible par 5 et 9.
3) Soit n un entier naturel et $A = \frac{3n+21}{n+2}$.
   Déterminer les valeurs de n pour que A soit un entier.
4) Déterminer le plus petit entier naturel n qui donne pour reste 5 quand on le divise par 7, 11 quand on le divise par 13 et 13 quand on le divise par 15.
5) Soit n un entier naturel. On pose $a = 5n + 7$ et $b = 3n + 2$.
   Quelles sont les valeurs possibles du PGCD(a,b) ?

Feuille à remettre

<u>Nom et prénom :</u> ……………………………………………..

<u>Classe :</u> ………………….