Série d'exercices N°5 4M Prof : Chouihi

Exercice N°1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
A tout point M d'affixe z non réel, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z\bar{z}}{\bar{z} - z}$.

1) Montrer que M' appartient à $(O, \vec{v})$.
2) Montrer que : $|z'| = |z' - z|$. Interprétation le résultat géométriquement.
3) Soit M un point n'appartenant pas à $(O, \vec{u})$. Donner une construction géométriquement de M'.
4) Soit M un point n'appartenant pas à $(O, \vec{u})$.
a) Montrer que: $\dfrac{z'-z}{z'} = \dfrac{z}{\bar{z}}$.
b) En déduire l'ensemble E des points M pour lesquels le triangle OMM' est rectangle en M'.

Exercice N°2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit k un réel strictement positif.
On définit l'application f du plan P dans P qui à tout point M d'affixe non nul z, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{k}{\bar{z}}$.

1/ Démontrer que $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM}$
2/ En déduire que M' est le point de la droite (OM) tel que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = k$
3/ Quelle est l'image du point M' par f ?
4/ Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
5/ On considère le cercle C de centre O et de rayon $\sqrt{k}$. Soit M un point extérieur à C ; on mène depuis M une tangente au cercle C et on désigne par T le point de contact. Soit N le projeté orthogonal de T sur la droite (OM). Montrer que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = OT^2$.
En déduire que le point N coïncide avec le point M' image de M par f.
6/ En déduire une construction du point M' connaissant M. (considérer deux cas : M à l'extérieur de C et M à l'intérieur de C)

Exercice N°3

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. On désigne par A et B les points de P d'affixes respectifs 1 et –1.Soit $\theta \in]0,\pi[$.on considère l'équation à une inconnue complexe z :

$$z^2 - 2z + 2\sin^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta = 0. \quad (E)$$

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E).
1) Montrer, sans résoudre (E), que :

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \theta - \frac{\pi}{2}[2\pi].$$

2) Résoudre l'équation (E). On désignera par z_1 la solution qui a une partie imaginaire positive.
3) Mettre z_1 sous forme trigonométrique. En déduire la forme trigonométrique de z_2.
4) Soient M_1 et M_2 les points de P d'affixes respectifs z_1 et z_2 et soit I le milieu de $[M_1M_2]$. Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 lorsque θ décrit $]0,\pi[$. En déduire l'ensemble décrit par M_2 lorsque θ décrit $]0,\pi[$.
5) a) Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $z_1' = \dfrac{1}{\bar{z_1}}$.. En déduire une construction du point $M_1'(z_1')$ à partir du point M_1.
b) Montrer que : $\left(\dfrac{z_1 + z_1'}{2} - 1\right).\left(\dfrac{z_1 + z_1'}{2} + 1\right) = \left(\dfrac{z_1 - z_1'}{2}\right)^2$.
c) En déduire que : $\overrightarrow{M_1M_1'}$ est un vecteur directeur de la bissectrice du secteur [KA,KB] où K est le milieu du segment $[M_1M_1']$ et que :$M_1M_1'^2 = 4KA.KB$

Exercice N°4

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose:

$$S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + ... + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

1) Démontrer que $S_n = \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.
2) Quelle est la limite de la suite (S_n) ? Celle de la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$?

Exercice N°5

$x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in Z$. Calculer la somme:

$$S = 1 + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \frac{\cos 3x}{\cos^3 x} + ... + \frac{\cos nx}{\cos^n x}. \quad n \in IN^*$$

Exercice N°6

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A tout point m d'affixe z on associe le point M d'affixe $Z = \dfrac{z^3}{2 + |z|^3}$. On note $z = re^{i\alpha}$ et $Z = \rho e^{i\theta}$

1) Exprimer ρ et θ en fonction de r et α.
2) On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et T le point d'affixe 1 – i
a) Quel est l'ensemble des points M lorsque m décrit le cercle $\mathcal{C}$?
b) A quel ensemble appartient M lorsque m décrit la demi-droite [OT) ?
3) On note f la fonction définie sur $I = [0,+\infty[$ par:

$$f(x) = \frac{x^3}{2 + x^3}$$

a) Etudier les variations de f et déduisez-en que f est strictement croissante sur I et que l'image de I par f est l'intervalle [0,1[.
b) Déduisez-en que lorsque m est un point quelconque du plan complexe, le point M est un point d'un disque que vous préciserez.