Série N°4 4M Prof : Chouihi

Exercice N°1

Soit la suite U définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{1+U_n} \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $0<U_n<3$
b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.
c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2/ Soit la suite V définie par $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n}$

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique.
b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n).

3/ Soit la suite W définie par $W_n = \frac{3}{U_n}$ et on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} W_k$$

a/ Montrer que $\forall n \in IN$, $W_n = 1 - V_n$
b/ Montrer que $\forall n \in IN$, $S_n = 1 + n + \frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$
c/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice N°2

Soit la suite U définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{1+U_n} \end{cases}$

1/ On considère la suite V définie par $V_n = U_{2n}$
a/ Montrer que $V_{n+1} = \frac{2(1+V_n)}{3+V_n}$
b/ Montrer que $\forall n \in IN$, $V_n \geq 1$.
c/ Montrer que V est décroissante.
d/ En déduire que V est convergente et calculer sa limite.
3/ Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$
4/ Soit la suite W définie sur IN par $W_n = \frac{-1+U_n}{2+U_n}$
a/ Montrer que W est une suite géolétrique.
b/ Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice N°3

Soit les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :
$U_0 = 0$; $V_0 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3}$ et
$V_{n+1} = \frac{3U_n + 2V_n}{5}$

1) Calculer U_1 et V_1
2) Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq V_n$
3) Montrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.
4) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.
5) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = 9U_n + 5V_n$
a) Montrer que (W_n) est une suite constante.
b) En déduire la valeur de la limite commune des suites (U_n) et (V_n).

Exercice N°4

Soit la suite U définie sur IN par $U_0 \in IR$ et $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}}$

1/ Dans cette question on suppose que $U_0 = \cos x$ avec $x \in]0, \pi/2[$
a/ Montrer que $\forall n \in IN$, $U_n = \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$
b/ En déduire la limite de la suite U.
2/ On suppose dans cette question que $U_0 \in]0,1[$
a/ Montrer que $\forall n \in IN$, $0 < U_n < 1$.
b/ Montrer que la suite U est monotone.
c/ En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.

Exercice N°5

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$U_1 = 1$, $U_2 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+2} = 6U_{n+1} - 8U_n$
Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

1) a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $W_{n+1} = 6 - \frac{8}{W_n}$
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $2 < W_n < 4$
c) Montrer que la suite w est croissante
d) Montrer que la suite w est convergente et déterminer sa limite.
2) Soit la suite réelle t définie sur $\mathbb{N}^*$ par $t_n = \frac{W_n - 4}{W_n - 2}$
a) Montrer que t est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $W_n = \frac{2(1+2^n)}{1+2^{n-1}}$
c) En déduire que $U_n = 2^{n-2}(1 + 2^{n-1})$
d) Déterminer la limite de la suite U.

Exercice N°6

On considère la suite U définie sur IN* par :
$U_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{k}{3^k}$

1/ Montrer que la suite (U_{2n}) est décroissante.
2/ Montrer que la suite (U_{2n+1}) est croissante.
3/ a/ Montrer que $\forall n \in IN^*$, $U_{2n} > U_{2n+1}$
b/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_{2n} - U_{2n+1})$
4/ Montrer que la suite (U_n) converge vers une limite α et que $U_3 < \alpha < U_2$.

Exercice N°7

Soit la suite (U_n) définie sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{6 + U_n^2}{1 + 2U_n}, \ n \in IN \end{cases}$$

1) a) Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $U_n > 2$
b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante
2) Soit la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 3}$
a) Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $V_{n+1} = (V_n)^2$
b) Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $V_n = (V_0)^{2^n}$
c) En déduire la limite de (Vn) puis retrouver limU
3) On pose $\forall n \in IN$: $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \ldots\ldots \times V_n$
Calculer P_n en fonction de n puis déterminer

Exercice N°8

On considère la suite U définie sur IN par :
$\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \ ; \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/ Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n \geq n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
2/ Soit W la suite définie sur IN* par
$W_n = U_n^2 - U_{n+1}.U_{n-1}$
a/ Montrer que W est une suite géométrique de raison -1
b/ En déduire que pour tout $n \in IN^*$,
$U_n^2 - U_{n+1}.U_{n-1} = (-1)^n$
3/ On considère la suite V de terme général $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$
a/ Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (V_{n+1} - V_n) = 0$

b/ Etablir l'égalité : $V_{n+1} - V_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{U_{n+1}.U_{n-1}}$, et en déduire la monotonie de la suite (V_{2n}) et celle de la suite (V_{2n+1}) .

c/ Montrer que pour tout $n \in IN$, $V_{2n} \le V_{2n+1}$

d/ En déduire que les suites (V_{2n}) et (V_{2n+1}) sont convergentes et quelles convergent vers la même limite.

e/ En déduire que la suite (V_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice N°9 On considère la suite U définie sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{U_n+6}{U_n+2} \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

1/ Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $U_n \ge 1$.

2/ a) Montrer que $U_{n+1} - 2$ et $U_n - 2$ sont de signes contraires.

b) En déduire que pour tout $p \in IN$, $U_{2p} \le 2 \le U_{2p+1}$

c) En déduire que si U est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$

3/ a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$,

$$|U_{n+1} - 2| \le \frac{1}{3}|U_n - 2|$$

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$,

$$|U_n - 2| \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ puis } \lim_{n\to+\infty} U_n.$$

4/ Soit les suites définies sur IN* par :

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} U_{2k} \ , \ b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} U_{2k+1} .$$

a) Montrer que pour tout $k \in IN$, on a :

$$2 - \frac{3}{9^k} \le U_{2k} \le 2 \ \text{ et } \ 2 \le U_{2k+1} \le 2 + \frac{1}{9^k}$$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Exercice N°10 On considère la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \dfrac{1+U_n}{1+2U_n}, n \in IN \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n \ge 1$.

b) Montrer que U est une suite croissante.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} U_n = +\infty$

2/ a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} \ge U_n + \frac{1}{2}$

b) En déduire que pour tout $n \in IN$, $U_n \ge 1 + \frac{n}{2}$.

Retrouver $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} U_n = +\infty$

3/ On pose $V_n = U_{n+1} - U_n$

a) Montrer que V est une suite décroissante.

b) En déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $V_n \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$

d) En déduire $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} V_n$

e) Montrer que la suite définie par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} V_k$ est divergente.

Exercice N°11

On considère les suites réelles (U_n) et (V_n) définies sur IN par : $U_0 = 3$, $U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$ et $V_n = \frac{7}{U_n}$.

1) Montrer par récurrence que pour tout n de IN, $U_n > 0$ et $V_n > 0$.

2) a) Démontrer que pour tout $n \in IN$,

$$(U_n + V_n)^2 - 28 = (U_n - V_n)^2 .$$

b) En déduire que pour tout $n \in IN$,

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{1}{4U_{n+1}}(U_n - V_n)^2 .$$

c) Conclure que pour tout $n \in IN$, on a : $U_n - V_n \ge 0$.

3) a) Prouver que la suite (U_n) est décroissante

b) En déduire que la suite (V_n) est croissante.

4) a) En s'aidant de la question 2.c et de la question 3.b, démontrer que pour tout $n \ge 1$, $U_n \ge \frac{21}{8}$.

b) Utiliser le résultat précédent et le résultat de 2.b pour démontrer que pour tout n de IN,

$$U_{n+1} - V_{n+1} \le \frac{1}{10}(U_n - V_n)^2 .$$

c) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout n de IN, $U_n - V_n \le \frac{1}{10^{2^n-1}}$.

d) Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{10^{2^n-1}}\right) = 0$, déterminer la limite de $U_n - V_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5) Conclure que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

6) Justifier que U_3 est une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{-7} près.

Exercice N°12

NB : Les questions 1/ 2/ 3/ et 4/ sont indépendantes !

1/ Soit (U_n) la suite définie sur IN* par : $U_1 = \frac{2}{3}$ et pour tout entier $n \ge 1$, $U_{n+1} = \frac{U_n}{2(2n+1)U_n + 1}$.

a/ On pose $V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n}$, $n \in IN^*$ et pour $n \ge 2$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} V_k .$$

Montrer que la suite V est arithmétique puis exprimer S_n en fonction de n.

b/ En deduire que pour tout $n \ge 1$, $U_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

c/ Calculer $T = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{2021}$

2/ On considère la suite (U_n) définie sur IN* par :

$$U_n = \frac{1!}{n!} + \frac{2!}{n!} + \frac{3!}{n!} + \dots + \frac{n!}{n!}$$

Montrer que pour tout $n \ge 3$, $1 \le U_n \le 1 + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)}$

et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3/ Soit (U_n) une suite définie sur IN et vérifiant pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} = U_n - \frac{5}{U_n^2}$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

4/ Soit a et b deux nombres complexes de module 1.

Montrer que pour tout nombre complexe z , le nombre $Z = \frac{\bar{z}+abz}{b-a}$ est imaginaire.