Série N°2 4M Prof : Chouihi

Exercice N°1

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{si } x\succ 3\\[2mm] \dfrac{4x^3-16x^2-13x+75}{8x^2-52x+84} & \text{si } x\prec 3\\[2mm] \dfrac{1}{4} & \text{si } x=3\end{cases}$$

1/Montrer que f est continue en 3

2/ Montrer que f est continue sur IR

Exercice N°2

1/ Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^3-3x^2-9x+27}{x-3}$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 3.

Donner ce prolongement.

2/ Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-8}{x-2} & \text{si } x<2\\ \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} & \text{si } x>2\end{cases}$

a/ Etudier la limite de f en 2.

b/ La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 2

Exercice N°3

Soit f la fonction définie sur IR\{-1} par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2x^2-2x}-2}{x+1} & si\ x\le 0\ et\ x\neq -1\\ x\sin\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)-2 & si\ x>0\end{cases}$$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ Montrer que pour tout x > 0, $-x-2\le f(x)\le x-2$ puis étudier la continuité de f en 0.

2/ La fonction f est elle prolongeable par continuité en -1 ? Justifier.

3/ a/ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

b/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

4/ Soit g la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ par

$$g(x)=\begin{cases}f\left(\frac{1}{\sin x-1}\right) & si\ x\neq\frac{\pi}{2}\\ -\sqrt{2} & si\ x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

a/ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

b/ Montrer que la fonction g est continue sur $]0,\frac{\pi}{2}]$

Exercice N°4

Soit g la fonction définie sur [2, +∞[par

$g(x)=\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x-2}+1)}$

1/ a/ Montrer que g est continue sur [2,+∞[

b/ Montrer que g est décroissante sur [2,+∞[

c/ En déduire que g est majorée sur [2,+∞[

2/ a/ Montrer que l'équation : $g(x)=\frac{1}{2}$ admet au moins une solution α dans [2,3]

b/ En déduire que α est une solution de l'équation :

$$(x-1)\sqrt{x-2}=3-x$$

3/ Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-4x+3}$

a/ Déterminer le domaine de définition de f.

b/ Montrer que f est prolongeable par continuité en 3 et définir ce prolongement

4/ Soit h la fonction définie sur]-∞,3[par :

$$h(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-4x+3} & si\ x\in[2,3[\\ \frac{x^2-3x+2}{x-2} & si\ x\in]-\infty,2[\end{cases}$$

a/ Etudier la continuité de h en 2.

b/ Déterminer le domaine de continuité de h

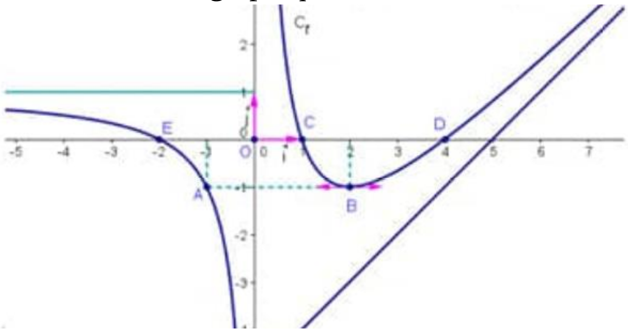
Exercice N°5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie et continue en tout point de IR*.

Les droites d'équations : x = 0 , y = 1 et y = x – 5 sont des asymptotes à la courbe Cf.

1/ En utilisant le graphique :



a/ Dresser le tableau de variations de f.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)-x+5}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(-\frac{2}{5}(f(x)-x)\right)$

c/ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction fof

d/ Résoudre graphiquement l'inéquation : fof(x) < -1

2/ Soit g la fonction définie sur [0,π] par

$$\begin{cases}g(x)=f\left(\frac{-x}{\sin x}\right) & si\ x\in]0,\pi[\\ g(0)=-1\ et\ g(\pi)=1\end{cases}$$

a/ Montrer que g est continue sur [0,π]

b/ Montrer que l'équationg(x) = x – 2 admet dans [0,π] au moins une solution.

Exercice N°6

1/ On sait que si une fonction g continue sur un intervalle [a,b] et tel que ∀x∈[a,b], g(x)≠ 0 alors g garde un signe constant sur [a,b]. Redémonter ce résultat.

2/ Soit f une fonctions continue sur [a; b] telle que (∀x∈[a; b]) ; f(x) ≠ x.

Montrer que l'équation : f of(x) = x n'admet pas de solutions dans [a; b]

Exercice N°7

Soit f une fonction continue sur [0; 1]telle que f(0) = f(1) et n un entier naturel (n > 1) .

Montrer que l'équation : $f(x)=f(x+\frac{1}{n})$ admet au moins une solution dans [0; 1]

Indication : Appliquer T.V.I à la fonction g définie par $g(x)=f(x)=f(x+\frac{1}{n})$ sur l'intervalle $[0,\frac{n-1}{n}]$

Exercice N°8

Soit f une fonction continue sur [0; 1]telle que f(0) ≠ f(1) montrer qu'il existe c∈]0; 1[) tel que : 2 f(c) = f(0)+f(1)

Exercice N°9

Soit n un entier naturel ($n \geq 2$) , et f_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$

a) Étudier les variations de f_n , et en déduire le signe de $f_n(\frac{2n}{n+1})$

b) Montrer qu'il existe $\beta \in]\frac{2n}{n+1},+\infty[$, unique tel que $f_n(\beta) = 0$

Exercice N°10

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\forall(x, y)$

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

1/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2/ On se propose de montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique.

a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

b) On suppose que $f(0) > 0$

i) Montrer que $\forall x > 0$, $f(0) - \frac{3}{2}x \leq f(x) - x \leq f(0) - \frac{1}{2}x$

ii) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.

c) Etudier le cas $f(0) < 0$, puis conclure.

Exercice N°11

Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = x.\cos(\frac{\pi}{x^2}) & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{x^2(\sqrt{x}-1)}{-x^2-x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Déterminer D_f.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

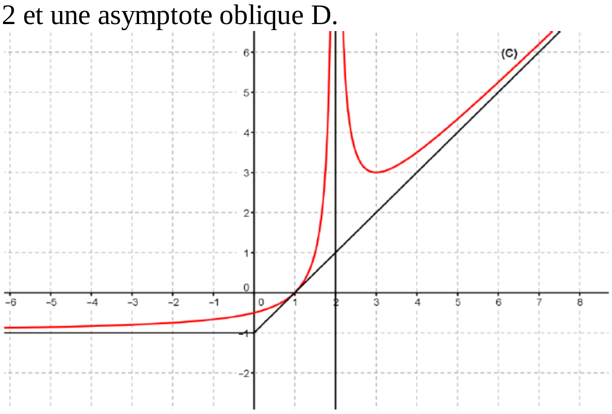
3) a) Encadrer f(x) pour $x \in]-\infty,0[$

b)Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ puis montrer que f est continue en0

4) f est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

Exercice N°12

Le graphique ci-dessous (C) est la représentation graphique dans un repère orthonormé d'une fonction f définie sur IR . (C) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ et une asymptote verticale d'équation $x = 2$ et une asymptote oblique D.



1) a) Par lecture graphique donner,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to 2} f(x) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x - f(x)}$$

b) Déterminer en justifiant : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(\sqrt{x^2+1}+x)}{x}$

c) Déterminer l'image de l'intervalle [1, 2[par f.

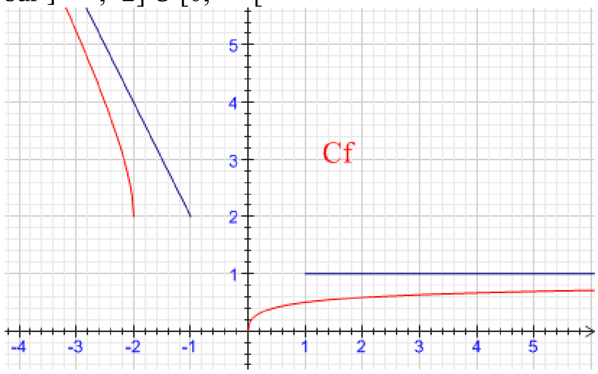
2) a) Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation f(x) = n admet dans [1,2[une solution unique U_n.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Exercice N°13

Le graphique ci-dessous représente une fonction f définie sur $]-\infty , -2] \cup [0, +\infty[$



1) Par lecture graphique donner:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)+2x]$. b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x^3(1-\cos(\frac{1}{x})))}{x}$

2) a) Montrer que pour tout n ∈ IN*, l'équation f(x) =(1/n) admet dans] 0, +∞[une solution unique α_n.

b) Etudier la monotonie de la suite (α_n) et en déduire que (α_n) est convergente.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

3) Soit h la fonction définie sur [0 , (π/2) [par :

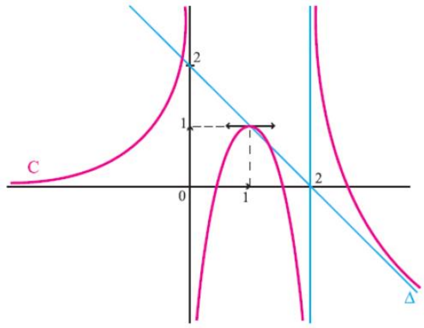
$$\begin{cases} h(x) = f(\frac{1}{\sin 2x}) & \text{si } x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\\ h(0) = 1 \end{cases}$$

a) Montrer que h est prolongeable par continuité à gauche en (π/2) par une fonction H.

b) Montrer que H est continue sur [0 , (π/2)].

Exercice N°14

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur **IR** \ {0,2} et telle que $f(-1/2) = 1$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = 2$ et $y = 0$ sont des asymptotes à la courbe C.



1) Déterminer graphiquement

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)+2x+1) ,\ \lim_{n\to+\infty} f(\frac{3^n+1}{4^n+5}) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(-x^2+\sin x)$$

2) a) f o f est-elle continue sur $]-\infty,-\frac{1}{2}]$?

b) Etudier les variations de f o f sur $]-\infty,-\frac{1}{2}]$

c) Déduire que l'équation f o f(x) = 0 admet une seule solution dans $]-\infty,-\frac{1}{2}]$