Exercice N°1

Soit a et b deux réels non nuls.

On pose $z_1 = \dfrac{a+ib}{a-ib}$ et $z_2 = \dfrac{a-ib}{a+ib}$

Montrer que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire.

Exercice N°2

Soit z un nombre complexe ≠ 1 ; On pose : $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$.

1) Déterminer l'ensemble D des points M(z) tels que : Z soit réel.
2) Déterminer l'ensemble C des points M(z) tels que : Z soit imaginaire pur.
3) Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que : l'origine O, M et M'(Z) soient alignés

Exercice N°3

Soient u et v deux nombres complexes de module 1 et tel que: $u \neq 1$ et $u \neq -1$

1) On pose $Z = \dfrac{1}{1+u}$ et $Z' = \dfrac{i}{1-u}$

Déterminer Re(Z) et Im(Z') .

2) On considère les nombres complexes: $a = \dfrac{uv}{u^2+v^2}$;

$b = \dfrac{uv}{(u+v)^2}$ et $c = \dfrac{uv}{u^2-v^2}$

En supposant que les dénominateurs sont non nuls, montrer que a et b sont réels et c est un imaginaire.

Exercice N°4

Soit a, b et c trois nombres complexes de modules sont égaux à 1 et tel que: a + b +c = 1. Calculer $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

Exercice N°5

Soit dans le plan complexe les points A(3) , B(-3) et M(z) tels que : $\dfrac{MB}{MA} = 2$

1) Etablir l'équivalence : $\dfrac{MB}{MA} = 2 \Leftrightarrow (z-5)(\bar{z}-5) = 16$

2) En déduire l'ensemble des points M.

Exercice N°6

Soit z un nombre complexe différent de 1, on pose :

$z' = \dfrac{z-1}{1-\bar{z}}$

1) Montrer que : $|z'| = 1$
2) Etablir que : $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est un réel.
3) Etablir que : $\dfrac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire .

Exercice N°7

Soit u un nombre complexe non réel . Montrer que :

$\forall z \in \mathbb{C}$, $|1 + uz| = |1 + u\bar{z}| \Rightarrow z \in IR$

Exercice N°8

Soit z un nombre complexe de module 1. Montrer que

a/ $|z + 1|^2 + |z - 1|^2 = 4$

b/ $Re\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}$ (pour $z \neq 1$)

Exercice N°9

Soit u et v deux nombres complexes.

On pose Z = u + iv. Montrer que :

$|Z|^2 = u^2 + v^2 \Leftrightarrow Z = 0$ ou ($u \in IR$ et $v \in IR$)

Exercice N°10

A, B et C étant trois points d'affixes respectifs a,b et c.

1) Etablir que : A,B,C alignés ssi

$$a(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c} - \bar{a}) + c(\bar{a} - \bar{b}) = 0$$

2) a/ En déduire une condition nécessaire et suffisante sur z et $\bar{z}$ pour que le point M(z) ∈ (AB) .

b/ Déduire encore que lorsque les points A et B sont sur le cercle trigonométrique alors on a :

$$z + ab\,\bar{z} - (a+b) = 0.$$

Exercice N°11

Démontrer que pour tous nombres complexes a et b, on a: $|a - b|^2 \leq (1 + |a|^2)(1 + |b|^2)$

Exercice N°12

z est un nombre complexe quelconque et u un nombre complexe tel que $|u| = 1$ et $u \neq 1$.

Prouver que $\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}$ est réel.

Exercice N°13

x, y et z étant trois nombres complexes de module 1.

Montrer que $|x + y + z| = |xy + xz + yz|$

Exercice N°14

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} - \{ -i, i \}$, on pose : $z' = \dfrac{2z}{1+z^2}$

1°) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que : z' soit réel.

2°) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que : z' soit imaginaire pur .

3°) Montrer que si le M(z) appartient au cercle trigonométrique alors le point M'(z') appartient à l'axe des réels.

Exercice N°15

Déterminer l'ensemble Γ des points M(z) tel que

$\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2$

Exercice N°16

Soit dans C, l'équation (E) : $z^2 + 2\alpha z + 1 = 0$, où z est l'inconnue et α un nombre complexe.

On désigne par a et b les solutions de (E).

1/ a/ Montrer que $1 - \alpha = \frac{(a+1)^2}{2a}$.

b/ Montrer que $1 + \alpha = -\frac{(a-1)^2}{2a}$.

2/ Montrer que $|1 - \alpha| + |1 + \alpha| = |a| + |b|$

Exercice N°17

Soit z' et z'' les racines de l'équation : $z^2 + bz + 9 = 0$; où b est un nombre complexe.

Montrer que : $2(|z'| + |z''|) = |z' + z'' + 6| + |z' + z'' - 6|$

Exercice N°18

Montrer que si $zz' = \alpha^2$ alors :

$|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} - \alpha\right| + \left|\frac{z+z'}{2} + \alpha\right|$

Série d'exercices N°3 4M Prof : Chouihi

Exercice N°1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
Soit A, M et N les points d'affixes respectives -1 , z et z' où z est un nombre complexe différent de -1 et $z'=\frac{z^2}{1+z}$

1. (a) Montrer que z' est réel si et seulement si
$z=\bar{z}$ ou $z\bar{z}=-(z+\bar{z})$
(b) En déduire l'ensemble *E* des points *M* d'affixe *z* tel que z' est réel.
2. Soit *z* un complexe non nul vérifiant $z\bar{z}=-(z+\bar{z})$ et soit θ un argument de z, $z\in]0,2\pi[$.
(a) Montrer que $|z| = -2\cos\theta$.
(b) En déduire que $z' = -4\cos^2\theta$
(c) Montrer que si *M* varie sur le cercle C de centre *A* et de rayon 1, alors *N* varie sur un segment que l'on précisera.

Exercice N°2

Soit a un nombre complexe non nul .Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A,B , M_1 et M_2 les points d'affixes respectives *a*, 2*a*, $z_1 = a + ia$ et $z_2 = a - ia$.

1. (a) Déterminer le milieu de $[M_1M_2]$.
(b) Montrer que $\frac{z_1}{z_2}=i$
(c) Montrer que OM_1BM_2 est un carré.
2. On suppose que $a = e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi[$
(a) Donner la forme exponentielle de z_1.
(b) Dans cette question on prend $\theta=\frac{\pi}{3}$

Écrire z_1 sous la forme algébrique et en déduire la valeur de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et celle de $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice N°3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
Soit les points A(1) et B(i) et la fonction f :P\{B}→ P ;
$M(z)\rightarrow M'(z')\ tel\ que z'=\frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$

1/ Déterminer l'ensemble des points M tel que f(M)= B.
2/ a) Montrer que si $z \neq i$ et $|z| = 1$ alors z' est imaginaire.
b) Montrer que $\overrightarrow{AM'}\ et\ \overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.
c) Construire alors le point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B.
3/ Déterminer l'ensemble E des points M(z) tels que z' soit réel.

Exercice N°4 (Bac princ 2013)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$on considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i.
On désigne par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles de centres respectifs E et F et de même rayon 1. Soit θ un réel de l'intervalle [0,2π[, M le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1 + e^{i\theta})$.
1/ a) Calculer $Aff(\overrightarrow{EM})$ et $Aff(\overrightarrow{FN})$.
b) Montrer que lorsque θ varie dans [0,2π[, M varie sur $\mathscr{C}_1$ et N varie sur $\mathscr{C}_2$.
c) Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.
2/ Soit P le point d'affixe z_P telle que $z_p = (1 - i)\sin\theta e^{i\theta}$
3/ Montrer que $\frac{Aff(\overrightarrow{EP})}{Aff(\overrightarrow{EM})}$ = sinθ - cosθ et calculer $\frac{Aff(\overrightarrow{FP})}{Aff(\overrightarrow{FN})}$
4/ Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

Exercice N°5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
Soit A le point d'affixe 1. On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O. Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'affixe z tel que $\left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OM}}\right)\equiv\theta\,[2\pi]$, on désigne par M_1, M_2 et M' les points d'affixes respectives $z_1 = z^2$, $z_2 = 2z$ et $z' = 2z - z^2$.
1/ Ecrire chacun des nombres complexes z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2/ Placer les points M_1, M_2 et M' lorsque θ = π/6
3/ Déterminer θ pour que les points O, M_1 et M_2 soient alignés
4/ On suppose que θ∈]0, π/2]
a) Montrer que OM_1M_2M' est un parallélogramme.
b) Déterminer θ pour que OM_1M_2M' soit un rectangle.
5/ a) Montrer que MM'= AM
b) Montrer que $\frac{z'-1}{z}$ est réel.
c) On suppose que M est distinct de A. Vérifier que A et M' sont distincts et montrer que A et M' sont symétriques par rapport à la tangente en M au cercle $\mathscr{C}$.

Exercice N°6

Résoudre dans C l'équation: $z^{-7}=\frac{1}{z^2}$

Exercice N°7

Résoudre dans C l'équation: $z^3+\bar{z}=0$

Exercice N°8

Soit $f:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C};z\mapsto f(z)=\frac{z-1}{z+|z|^2}$;

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
b) Déterminer l'ensemble E = {M(z) / f(z) = - 1}
c) On pose $z = e^{i\theta}$, θ∈]-π, 0[. Déterminer la forme exponentielle de f(z).

Exercice N°9

On considère les nombres complexes $z_1 = r\,e^{i\theta}$ et $z_2=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$ où $r\geq 1$ et $\theta\in]0,\pi/2[$.

Soit $(o,\vec{u},\vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan complexe et A, B , M_1 et M_2 les points d'affixes respectifs -1 , 1 , z_1 et z_2

1) Montrer que $|z_1-z_2|^2=r^2+\frac{1}{r^2}-2\cos2\theta$
2) On suppose dans la suite de l'exercice que z_1 et z_2 vérifient la condition $|z_1-z_2|=2$

a) Montrer que $r-\frac{1}{r}=2\cos\theta$.
b) Montrer que $BM_1=\sqrt{2}$
c) Montrer que (AM_1) //(BM_2)
d) Construire le point M_2 connaissant le point M_1

Exercice N°10

1) Montrer que pour tout réel x on a:
$$e^{ix}+2e^{2ix}+e^{3ix}=4\cos^2(\frac{x}{2})e^{2ix}.$$
2) En déduire la transformer en produit de:
cosx + 2cos2x + cos3x

Exercice N°11

Soit z et z' deux nombres complexes tel que $\left|\frac{z-zz'}{3-z\bar{z}'}\right|=1$ et $|z'|\neq 1$. Déterminer |z|

Exercice N°12

Soit a et c deux reels tel que a ≠ 0 et b un nombre complexe. Déterminer l'ensemble **Γ** des points M(z) tel que : $az\bar{z}+b\bar{z}+\bar{b}z+c=0$

*Exercice N°13 ******

Soit α, β et γ trois réels tel que :
$$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0\\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0\end{cases}$$
Montrer que : $\begin{cases}\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma=0\\ \sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=0\end{cases}$