Suites réelles

Cours élaboré par le prof: Chouihi

I. Suites arithmétiques- suites géométriques

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$U_{n+1} = U_n + r$	$U_{n+1} = qU_n$
Relation entre U_n et U_k	$U_n = U_k + (n – k)r$	$U_n = q^{n-k}U_k$
a, b et c termes consécutifs	$2b = a + c$	$b^2 = ac$
$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$	$S_n = \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$	$S_n = \begin{cases} U_0(\frac{1-q^n}{1-q}) & \text{si } q \neq 1 \\ nU_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}$
$S = \sum_{k=p}^{n} U_k$	$S = \frac{(n-p+1)}{2}(U_p + U_n)$	$S = \begin{cases} U_p \frac{(1-q^{n-p+1})}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n-p+1)U_p & \text{si } q = 1 \end{cases}$

Exercice N°1

Soit (U_n) la suite réelle définie par : $U_0 = 1$ et

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = -\dfrac{3}{2}U_n^2 + \dfrac{5}{2}U_n + 1$.

1°) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

2°) Peut-on faire une conjecture sur U_n ?

Prouver votre conjecture.

Exercice N°1

Soit (U_n) la suite réelle définie par : $U_0 = 1$ et

pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} = -\frac{3}{2}U_n^2 + \frac{5}{2}U_n + 1$.

1°) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

2°) Peut-on faire une conjecture sur U_n ?

Prouver votre conjecture.

Exercice N°2

On considère la suite (U_n) définie sur IN par :

$U_0 = 4$ et, pour tout $n \in$ IN, $U_{n+1} = U_n^2$.

1°) Calculer U_1, U_2, U_3, et U_4.

2°) Peut-on faire une conjecture sur U_n ?

Prouver votre conjecture.

Exercice N°2

On considère la suite (U_n) définie sur IN par :

$U_0 = 4$ et, pour tout $n \in$ IN, $U_{n+1} = U_n^2$.

1°) Calculer U_1, U_2, U_3, et U_4.

2°) Peut-on faire une conjecture sur U_n ?

Prouver votre conjecture.

Exercice N°3

Soit $(U_n)_{n \in IN}$ la suite réelle définie par :

$U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{4 - U_n^2}}$ pour tout $n \in IN$.

Soit $(V_n)_{n \in IN}$ la suite définie par : $V_n = \dfrac{2 + U_n^2}{2 - U_n^2}$

1°) Montrer que $(V_n)_{n \in IN}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

2°) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

3°) Calculer $S_n = 1 \times U_0^2 + 2\, U_1^2 + 3\, U_2^2 + \cdots + n\, U_{n-1}^2$ en fonction de n.

Exercice N°3

Soit $(U_n)_{n \in IN}$ la suite réelle définie par :

$U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{4 - U_n^2}}$ pour tout $n \in IN$.

Soit $(V_n)_{n \in IN}$ la suite définie par : $V_n = \dfrac{2 + U_n^2}{2 - U_n^2}$

1°) Montrer que $(V_n)_{n \in IN}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

2°) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

3°) Calculer $S_n = 1 \times U_0^2 + 2\,U_1^2 + 3\,U_2^2 + \cdots + n\,U_{n-1}^2$ en fonction de n.

Exercice N°4

Ecrire avec le symbole Σ puis calculer les sommes suivantes :

$S_1 = 2\times9 + 2\times81 + 2\times729 + \ldots + 2\times9^k$

$$S_2 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots + \frac{256}{6\,561}.$$

$S_3 = 21 + 25 + 29 + \ldots$ (20 termes)

$S_4 = 7 + 12 + 17 + \ldots + 102.$

NB. Dans tout ce qui suit $I = \{ n \in IN$ tel que $n \geq n_0 \}$ où n_0 est un entier naturel fixé, et U est une suite réelle définie sur I.

II. Majoration - Minoration

Activité

Soit U la suite définie sur IN par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+3U_n^2}{3+U_n^2}}$

Montrer que pour tout $n \in IN$; $0 \leq U_n < 1$

Activité

Soit U la suite définie sur IN par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+3U_n^2}{3+U_n^2}}$

Montrer que pour tout $n \in IN$; $0 \leq U_n < 1$

Définitions

- $\boxed{\text{La suite U est dite minorée ssi il existe un réel m tel que,}}$

  $\boxed{\text{pour tout } n\in I, \text{ on ait : } U_n \geq m}$

Exemple : $U_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$, $n\in IN$. Vérifier que la suite U est minorée par 2.

- $\boxed{\text{La suite U est dite majorée ssi il existe un réel M tel que,}}$

  $\boxed{\text{pour tout } n\in I, \text{ on ait : } U_n \leq M}$

Exemple : $U_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$, $n\in IN$. Vérifier que la suite U est majorée par 2.

- $\boxed{\text{La suite U est dite bornée ssi elle est à la fois majorée et minorée } \Leftrightarrow}$

  $\boxed{\text{il existe un réel } k > 0 \text{ tel que : pour tout } n\in I, \ \left|U_n\right| \leq k.}$

Exemple : $U_n = \dfrac{n\,\mathbf{sin}(n)}{2n+1}$. Montrer que la suite U est bornée.

Définitions

- La suite U est dite minorée ssi il existe un réel m tel que, pour tout $n \in I$, on ait : $U_n \geq m$

Exemple : $U_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$, $n \in IN$. Vérifier que la suite U est minorée par 2.

Définitions

- $\boxed{\text{La suite U est dite majorée ssi il existe un réel M tel que,}}$
  $\boxed{\text{pour tout } n \in I \text{, on ait : } U_n \leq M}$

Exemple : $U_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$, $n \in IN$. Vérifier que la suite U est majorée par 2.

Définitions

- $\boxed{\text{La suite U est dite bornée ssi elle est à la fois majorée et minorée} \Leftrightarrow}$

$\boxed{\text{il existe un réel } k > 0 \text{ tel que : pour tout } n \in I,\ |U_n| \leq k.}$

Exemple : $U_n = \dfrac{n\,\mathbf{sin(}n\mathbf{)}}{2n+1}$. Montrer que la suite U est bornée.

Exercice N°8 page 169

Montrer que chacune des suites définies ci-dessous est bornée.

$$u_n = 3 + \frac{2n}{n^2+1}, \ n \geq 0.$$

$$v_n = 3 - 2\cos(4n-1), \ n \geq 0.$$

$$w_n = 1 + \frac{(-5)^n}{6^n\sqrt{n}}, \ n > 0.$$

Exercice N°8 page 169

$$u_n = 3 + \frac{2n}{n^2+1},\ n \geq 0.$$

Exercice N°8 page 169

$$v_n = 3 - 2\cos(4n - 1),\ n \geq 0.$$

Exercice N°8 page 169

$$w_n = 1 + \frac{(-5)^n}{6^n \sqrt{n}},\ n > 0.$$

III. Monotonie

Définitions

- La suite U est dite croissante sur I ssi pour tout $n \in I$, $U_{n+1} \geq U_n$

Exemple : $U_0 \in IR$ et $U_{n+1} = U_n^2 - U_n + 1$, $n \in IN$.

Montrer que la suite U est croissante.

- La suite U est dite strictement croissante sur I ssi pour tout $n \in I$, $U_{n+1} > U_n$

Exemple : Soit U la suite définie sur IN par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+3U_n^2}{3+U_n^2}}$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$; $0 \leq U_n < 1$
b) Montrer que la suite U est strictement croissante.

Définitions

- La suite U est dite croissante sur I ssi pour tout $n \in I$, $U_{n+1} \geq U_n$

Exemple : $U_0 \in IR$ et $U_{n+1} = U_n^2 - U_n + 1$, $n \in IN$.

Montrer que la suite U est croissante.

Définitions

- La suite U est dite strictement croissante sur I ssi pour tout $n \in I$, $U_{n+1} > U_n$

Exemple : Soit U la suite définie sur IN par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+3U_n^2}{3+U_n^2}}$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$; $0 \leq U_n < 1$
b) Montrer que la suite U est strictement croissante.

Définitions

- La suite U est dite décroissante sur I ssi pour tout $n \in I$, $U_{n+1} \leq U_n$.

Exemple : $U_0 \in IR$ et $U_{n+1} = -U_n^2 + 5U_n - 4$, $n \in IN$.

Montrer que la suite U est décroissante.

- La suite U est dite strictement décroissante sur I ssi pour tout $n \in I$, $U_{n+1} < U_n$

Exemple : Soit U la suite définie sur IN par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n > 2$

b) Montrer que la suite U est strictement décroissante.

- La suite U est dite constante ssi pour tout $n \in I$, on ait : $U_{n+1} = U_n$

Exemple : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$. Vérifier que la suite U est constante.

- La suite U est dite stationnaire (constante à partir d'un certain rang) ssi

il existe $p \in I$, tel que :pour tout $n \geq p$, $U_{n+1} = U_n$

Exemple : $U_0 = \frac{2}{3}$ et $U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n^2 - 2U_n + 3$. Montrer que la suite U est stationnaire.

Définitions

- La suite U est dite décroissante sur I ssi pour tout $n \in I$, $U_{n+1} \leq U_n$.

Exemple : $U_0 \in IR$ et $U_{n+1} = -U_n^2 + 5U_n - 4$, $n \in IN$.

Montrer que la suite U est décroissante.

Définitions

- La suite U est dite strictement décroissante sur I ssi pour tout $n \in I$, $U_{n+1} < U_n$

Exemple : Soit U la suite définie sur IN par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n > 2$
b) Montrer que la suite U est strictement décroissante.

Définitions

- La suite U est dite constante ssi pour tout $n \in I$, on ait : $U_{n+1} = U_n$

Exemple : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$. Vérifier que la suite U est constante.

Définitions

- La suite U est dite stationnaire (constante à partir d'un certain rang) ssi

  il existe $p \in I$, tel que :pour tout $n \geq p$, $U_{n+1} = U_n$

Exemple : $U_0 = \frac{2}{3}$ et $U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n^2 - 2U_n + 3$. Montrer que la suite U est stationnaire.

Exercice

Soit la suite réelle U définie sur IN^* par :

$$\begin{cases} U_1 = -1 \\ \forall n \in N^* ; U_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)} U_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$$

1°) a) Montrer par récurrence que la suite U est majorée par 3

b) Etudier la monotonie de la suite U.

2°) On considère la suite V définie sur IN^* par : $V_n = n(3 - U_n)$

a) Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison q et calculer son premier terme V_1.

b) Exprimer V_n en fonction de n puis calculer U_n en fonction de n.

Exercice

Soit la suite réelle U définie sur IN^* par :

$$\begin{cases} U_1 = -1 \\ \forall n \in N^*; U_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)} U_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$$

1°) a) Montrer par récurrence que la suite U est majorée par 3

b) Etudier la monotonie de la suite U.

2°) On considère la suite V définie sur IN^* par : $V_n = n(3 - U_n)$

a) Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison q et calculer son premier terme V_1.

b) Exprimer V_n en fonction de n puis calculer U_n en fonction de n.

IV. Représentation graphique des suite récurrentes (du types $U_{n+1} = f(U_n)$)

Activité

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère la fonction f définie par $f(x) = 2\sqrt{3+x}$ et la suite U définie par:

$U_0 \in IR$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

On se propose de représenter graphiquement la suite U.

1/On suppose $U_0 = -2$

a) Tracer la courbe Cf et la droite Δ d'équation: $y = x$.

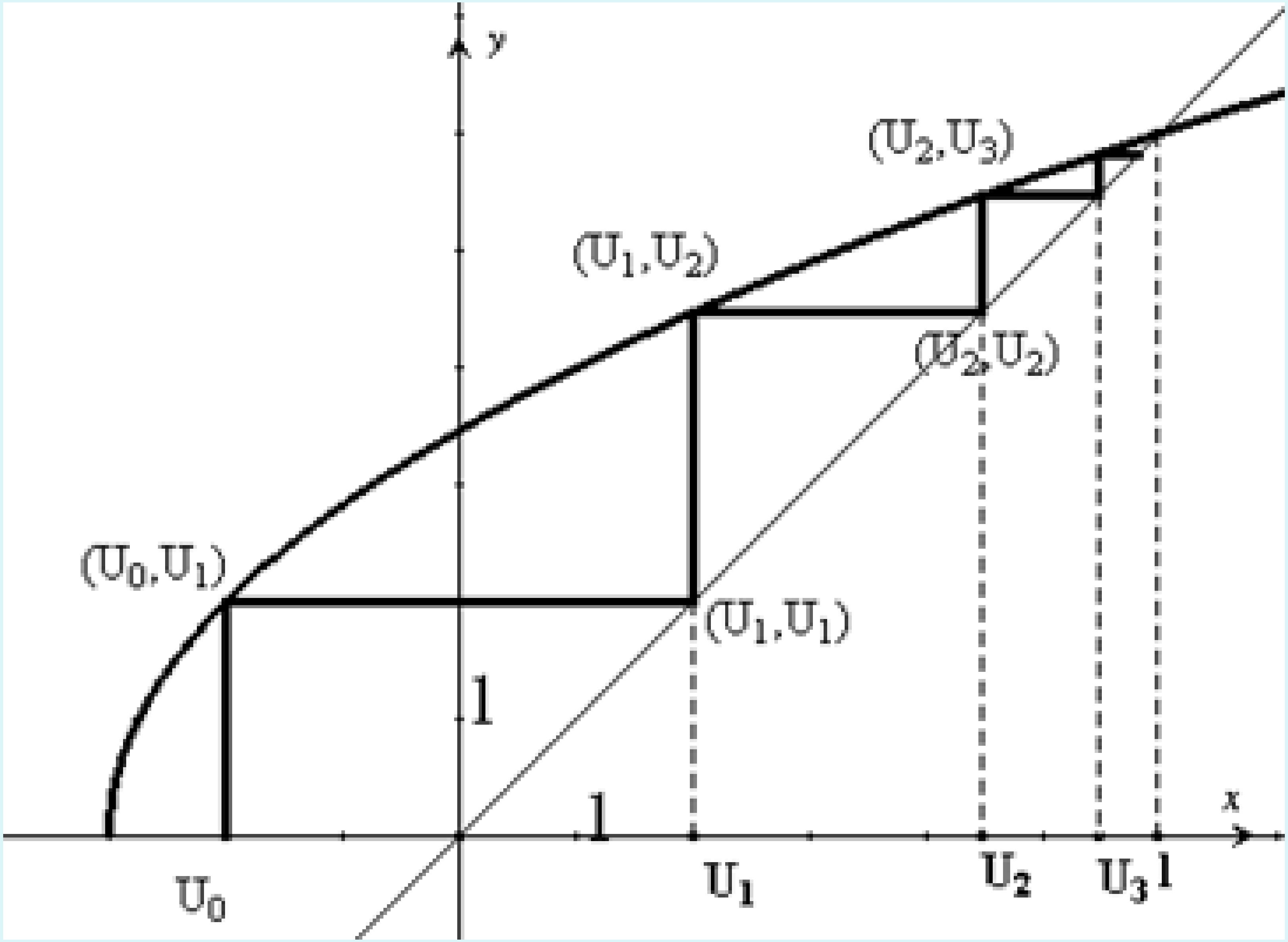
b) Placer les points $A_1(U_0,U_1)$; $B_1(U_1,U_1)$; $A_2(U_1,U_2)$; $B_2(U_2,U_2)$; $A_3(U_2,U_3)$ et $B_3(U_3,U_3)$.

c) Placer sur l'axe des abscisses les termes U_0, U_1, U_2 et U_3.

d) Que peut on conjecturer pour la suite U?

2/ Reprendre les questions du 1/ pour $U_0 = 10$ puis pour $U_0 = 6$

Théorème



I. Convergence

Activité

On pose $U_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$, $n \in IN$

1°) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

2°) Déterminer un entier p tel que:

a) Pour tout $n \geq p$, $|U_n - 2| < 10^{-2}$.

b) Pour tout $n \geq p$, $|U_n - 2| < 10^{-5}$.

c) Pour tout $n \geq p$, $|U_n - 2| < \varepsilon$; $\varepsilon \in IR_+^*$.

Définition

Soit U une suite définie sur I et $\ell \in IR$.

$$\left(\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell\right) \Leftrightarrow \left(\text{Pour tout } \varepsilon > 0\text{, il existe } p \in IN \text{ tel que: } n \geq p \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon\right)$$

Dans ce cas on dit que la suite U **<u>converge</u>** vers ℓ et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ ou $\lim U = \ell$.

<u>NB:</u>

- La suite U est dite convergente si et seulement si elle admet une limite finie.
- La suite U est dite divergente si et seulement si elle n'est pas convergente

$\Leftrightarrow$ U n'a pas de limite ou U a une limite infinie.

Exemple

On pose $U_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$, $n \in IN$.

Montrer que la suite U est convergente.

Théorème

Si

une suite U admet une limite finie ℓ

alors

cette limite est **unique**.

Théorème

Soit U une suite définie sur I et $\ell \in IR \cup \{-\infty, +\infty\}$

$$\left(\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} U_{2n} = \ell \ \textbf{\underline{et}} \ \lim_{n\to+\infty} U_{2n+1} = \ell\right)$$

Exemple: On pose $U_n = (-1)^n$. Montrer que U est divergente.

<u>NB:</u> Si $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$ **<u>alors</u>** $\left(\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \ell ; \lim_{n\to+\infty} U_{2n} = \ell ;\right.$

$$\left.\lim_{n\to+\infty} U_{2n+1} = \ell ; \lim_{n\to+\infty} U_{an+b} = \ell, \ a \in IN^* \text{ et } b \in IN\right)$$

Théorème

Toute suite convergente est bornée

<u>Démonstration:</u> Soit $\varepsilon > 0$.

Hypothèse: lim U = ℓ alors il existe $p \in I$ tel que: $n \geq p$

$$\Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon + \ell < U_n < \varepsilon + \ell$$

En posant: $m = \inf(-\varepsilon + \ell, U_{n0}, U_{n0+1}, \ldots, U_{p-1})$ et

$M = \sup(\varepsilon + \ell, U_{n0}, U_{n0+1}, \ldots, U_{p-1})$ on déduit que:

pour tout $n \in I$, $m < U_n < M$ et par suite que U est bornée.