Les suites réelles

Cours préparé par le prof: Chouihi Lotfi

A. Généralités

Activité

1) Compléter la liste des nombres :

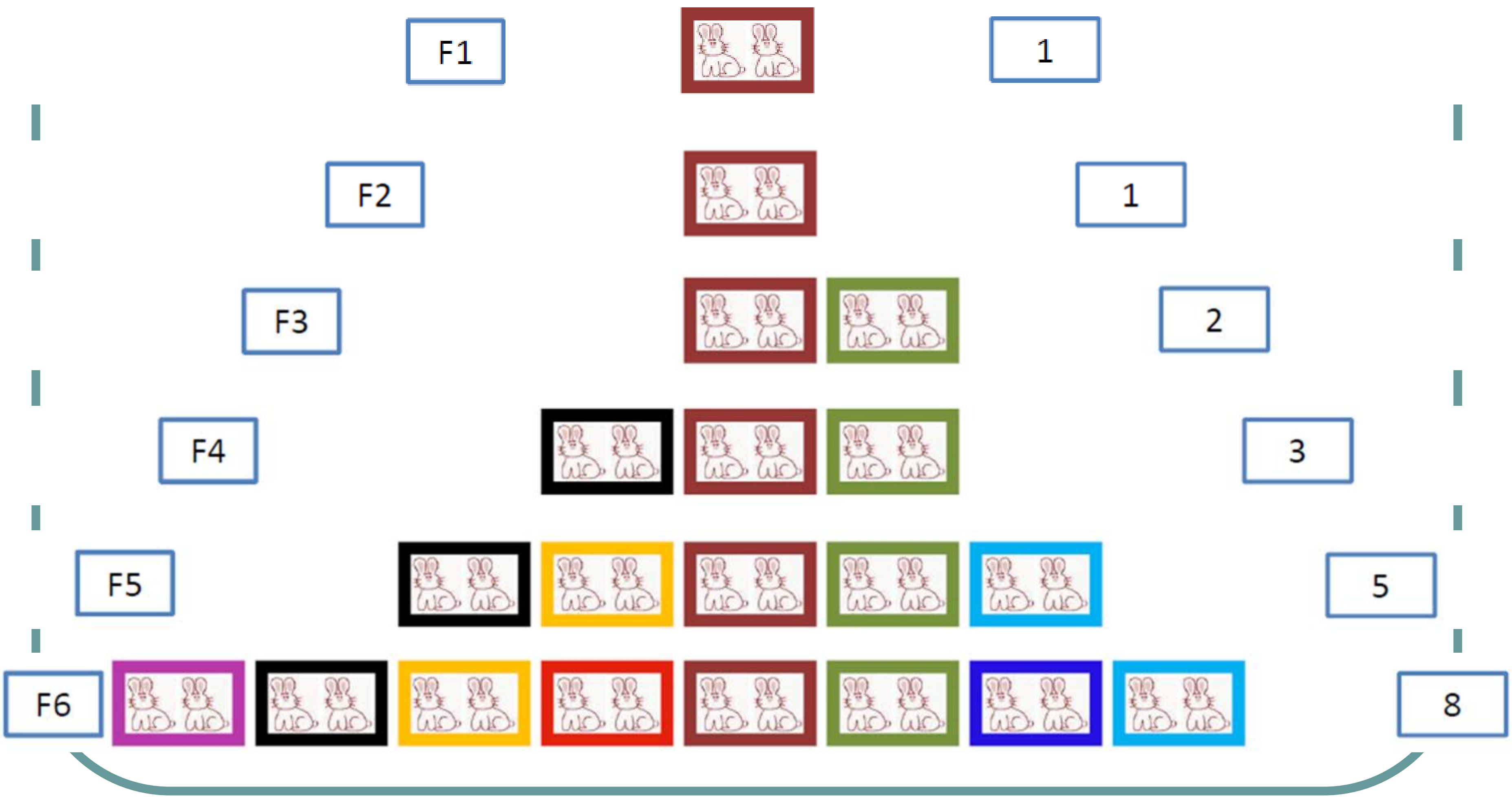
a) 1, 3 ,5 ,7 ,9 ,…...

b) 1, 4, 9, 16, 25, …

c) 2, 10, 26, 50, 82, 122, 170,…

2) (Suite de Fibonacci) Possédant initialement un couple de lapins, combien de couples de lapins obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second moi de son existence

Suite de FIBONACCI



Cours préparé par le prof: Chouihi Lotfi

Définition

Soit n_0 un entier naturel.

Lorsqu'à tout entier naturel n supérieur ou égal a n_0 on associe un réel unique U(n) on dit que l'on a défini une suite de nombres réels.

Le réel U(n) s'appelle le terme général de la suite et se note U_n.

La suite se note $(U_n)_{n \geq n0}$ ou (U_n).

Application 1

Soit la suite (U_n) définie sur IN par $U_n = \frac{2n^2+1}{n+7}$

1) Calculer les cinq premier termes de la suite U.
2) Calculer U_7 , U_{11} et U_{15}
3) Exprimer en fonction de n: U_{n+1} , U_{n-1} , U_{2n} et U_{2n+1}.
4) A- t-on $U_{n+1} = U_n + 1$?

Application 2

Soit la suite (U_n) définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1+U_n}{2+U_n} \end{cases}$

1) Calculer les cinq premier termes de la suite U.
2) Utiliser votre calculatrice pour compléter le tableau suivant:

n	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
U_n						

Application 3

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

a) Calculer S_5 , S_{49} et S_{99}

b) Montrer que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

2) Soit la suite (U_n) définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_n = U_{n-1} + 8n \end{cases}$

a) Calculer les cinq premier termes de la suite U.

b) Que peut-on conjecturer pour U_n en fonction de n ?

c) Prouver votre conjecture,

B. Les suites arithmétiques

Activité

Soit la suite (U_n) définie sur IN par $U_n = \frac{3n+5}{4}$

1) Calculer U_0, U_1, U_2 , U_3 et U_4.
2) a) Compléter

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$\mathbf{U_{n+1} - U_n}$					

b) Que peut-on conjecturer?

Prouver votre conjecture.

Définition

On dit qu'une suite (U_n) est arithmétique s'il existe un réel r (indépendant de n) tel que, pour tout entier naturel n on a: $\mathbf{U_{n+1} = U_n + r}$.

Le nombre réel r est appelé **raison** de cette suite..

Exercice

a et b sont deux réels donnés et U la suite définie sur IN par $U_n = an + b$

Montrer que U est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

Exercice N°4 page 18

4 Indiquer parmi les suites définies ci-après celles qui sont des suites arithmétiques.

a) $U_n = 3n + 1$, $n \in IN$.

b) $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 1 - U_n$, $n \in IN$.

c) $U_0 = 5$ et $U_{n+1} - U_n = 3$, $n \in IN$.

Propriétés

Dans ce qui suit (U_n) est une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r.

Terme général d'une suite arithmétique

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = U_0 + r \\ U_2 = U_1 + r \\ U_3 = U_2 + r \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ U_{n-1} = U_{n-2} + r \\ U_n = U_{n-1} + r \end{array}\right\}$$

En additionnant membre à membre et en simplifiant on obtient:

$$\boxed{\mathbf{U_n = U_0 + nr}}$$

Prouver aussi que pour tous n et p de IN on a:

$$\boxed{\mathbf{U_n = U_p + (n - p)r}}$$

Somme des termes d'une suite arithmétique

On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1}$

On se propose d'exprimer S_n en fonction de n, U_0 et r.

Somme des termes d'une suite arithmétique

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = U_0 + r \\ U_2 = U_0 + 2r \\ U_3 = U_0 + 3r \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ U_{n-1} = U_0 + (n-1)\, r \end{array}\right\}$$

En additionnant membre à membre on obtient: $S_n = nU_0 + (1+2+3+\ldots(n-1))r$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2U_0 + (n-1)r]}$$

Ou encore:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[U_0 + U_{n-1}]}$$

Plus généralement

Si S est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique alors:

$$\boxed{S = \frac{(nombre\ de\ termes)}{2}\left[1^{ér}\ terme + dernier\ terme\right]}$$

C. Les suites géométriques

Activité

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans selon le contrat suivant: un loyer de 200 dinars pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail.
On désigne par U_n le loyer au $n^{ième}$ mois , ainsi $U_1 = 200$.
1/ Calculer le loyer du deuxième, du troisième , du quatrième et du cinquième mois.
2/ Compléter le tableau suivant:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	
$\mathbf{U_{n+1} / U_n}$					

3/ Quelle est le loyer total que l'étudiant a payé au bout des trois ans?

Définition

On dit qu'une suite (U_n) est géométrique s'il existe un réel q (indépendant de n) tel que, pour tout entier naturel n on a: $\mathbf{U_{n+1} = qU_n}$.

Le nombre réel q est appelé **raison** de cette suite..

Exercice

Parmi les suites (U_n) définies ci-dessous préciser celles qui sont géométriques et déterminer dans ce cas, le premier terme et la raison .

1/ $U_n = 3 \times 2^n$

2/ $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = nU_n \end{cases}$

3/ $\begin{cases} U_0 = 3 \\ 2U_{n+1} - 5U_n = 0 \end{cases}$

Exercice

a et b sont deux réels donnés et U la suite définie sur IN par $U_n = b \times a^n$

Montrer que U est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

Propriétés

Dans ce qui suit (U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 \neq 0$ et de raison $q \neq 0$.

Terme général d'une suite géométrique

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= qU_0 \\ U_2 &= qU_1 \\ U_3 &= qU_2 \\ &\;. \\ &\;. \\ &\;. \\ U_{n-1} &= qU_{n-2} \\ U_n &= qU_{n-1} \end{aligned}\right\}$$

En multipliant membre à membre et en simplifiant on obtient:

$$\boxed{U_n = q^n U_0}$$

Prouver aussi que pour tous n et k de IN on a:

$$\boxed{U_n = U_k\, q^{n-k}}$$

Exercices (page 26)

3 Soit (U_n) une suite de nombres réels non nuls, telle que $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{3}$. Donner le terme général de la suite (U_n).

4 Déterminer la raison q d'une suite géométrique (V_n) sachant que $V_0 = -6$ et $V_8 = -1536$.

5 (U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.

Déterminer n sachant que $U_n = \frac{5}{59049}$.

6 (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$, et telle que $U_9 = \frac{-1}{32768}$. Calculer U_{17}.

7 Déterminer la raison q d'une suite géométrique (U_n) sachant que $U_4 = 25$ et $U_{11} = 1953125$.

Somme des termes d'une suite géométrique

On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1}$
On se propose d'exprimer S_n en fonction de n, U_0 et q.

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = qU_0 \\ U_2 = q^2U_0 \\ U_3 = q^3U_0 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ U_{n-1} = q^{n-1}U_0 \end{array}\right\}$$

En additionnant membre à membre on obtient: $S_n = (1+q+q^2+\ldots+ q^{n-1})U_0$

Donc $qS_n = (q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n)U_0$

Alors $(1 - q)S_n = (1 - q^n)U_0$

Ce qui donne pour $q \neq 1$

$$\boxed{S_n = U_0\left[\frac{1-qn}{1-q}\right]}$$

Plus généralement

Si S est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q alors:

Si $q \neq 1$ $\quad S = (1^{ér}\ terme)\dfrac{(1-q^{nombre\ de\ termes})}{1-q}$

Si $q = 1$ $\quad S = (nombre\ de\ termes) \times (1^{ér}\ terme)$

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & si\ \ x \neq 1 \\ (n+1) & si\ x = 1 \end{cases}$$

Application (page 26)

8 Soit (V_n) une suite géométrique de premier terme $V_0 = 5$ et de raison $q = -\dfrac{1}{2}$.
On pose $S = V_0 + V_1 + \ldots + V_6$ et $S' = V_{11} + V_{12} + \ldots + V_{20}$.
Calculer S et S'.

9 Calculer les deux sommes suivantes :

$$A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots - \frac{1}{2187} .$$

$$B = 32 + 64 + 128 + \ldots + 2048.$$