Continuité

Cours élaboré par le prof: Chouihi

I. Préliminaire

Activité N°1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes:

a) $|x - 1| < 2$

b) $0 < |x - 1| < 2$

c) $|x - a| < \alpha$ (a réel et $\alpha > 0$)

d) $0 < |x - a| < \alpha$ (a réel et $\alpha > 0$)

Commentaires

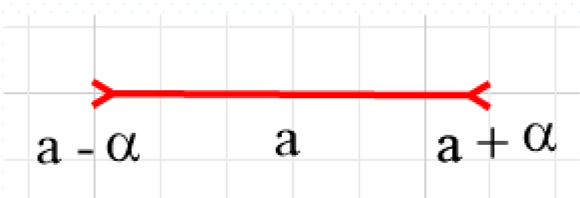
On a ainsi prouvé les équivalences:

- $|x - a| < \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x \in I =]a - \alpha, a + \alpha[$
- $0 < |x - a| < \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x \in J =]a - \alpha, a + \alpha[\setminus \{a\}$

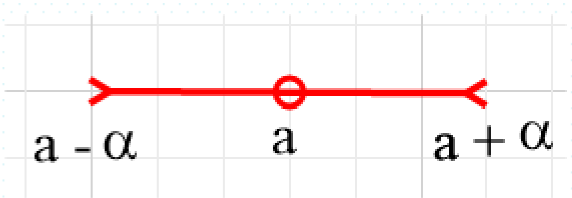
$$=]a-\alpha, a[\cup]a, a+\alpha[$$

Vocabulaire:

- **I est un intervalle ouvert de centre a, il est aussi appelé intervalle ouvert centré en a.**
- **J est appelé intervalle épointé de centre a.**
- **I et J sont des voisinages de a.**



I



J

Activité N°2 page 22

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Représenter sur l'axe des ordonnées l'ensemble des réels y tels que $|y-2| < \frac{1}{2}$.
2. Représenter sur l'axe des abscisses l'ensemble des réels x tels que $|x+1| < 0.2$.
3. En déduire l'ensemble des points M(x, y) du plan tels que

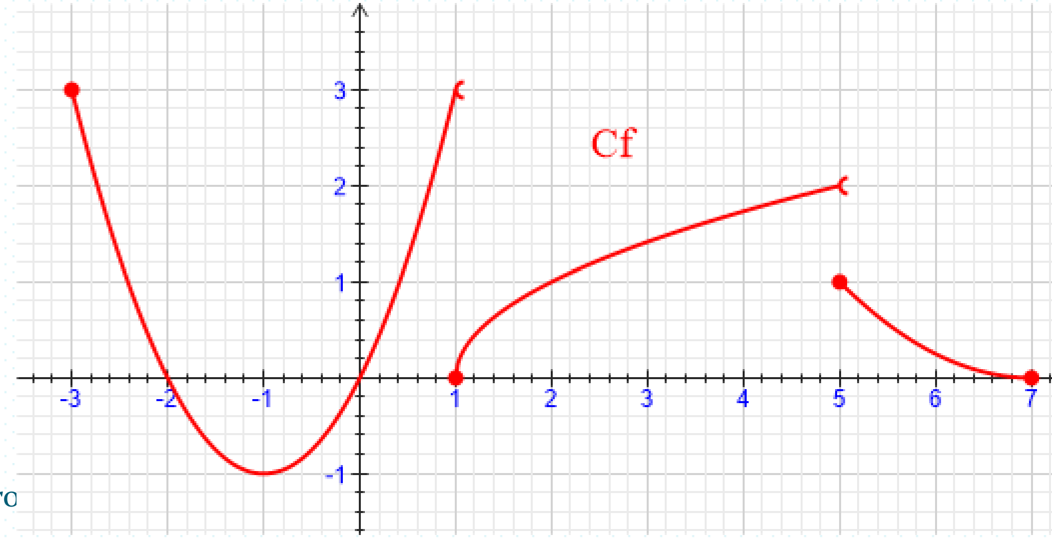
$$\begin{cases} |x+1| < 0.2, \\ |y-2| < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

II. Continuité en un réel

Activité N°3

Sur le graphique ci-dessous on a représenté graphiquement une fonction f définie sur [-3,7], par lecture graphique:

1) **f est elle continue en 2? Pourquoi?**
2) **f est elle continue en 1? Pourquoi?**
3) **Déterminer les intervalles sur les quels f est continue.**
4) **Pour chaque valeur de β déterminer un réel strictement positif α tel que si $|x - 2| < \alpha$ alors $|f(x) - f(2)| < \beta$**
   $\beta = 1$; $\beta = 0{,}4$; $\beta = 0{,}2$
5) **Existe-t-il un réel strictement positif α tel que pour tout x vérifiant $|x - 1| < \alpha$ on a $|f(x) - f(1)| < 0{,}4$?**



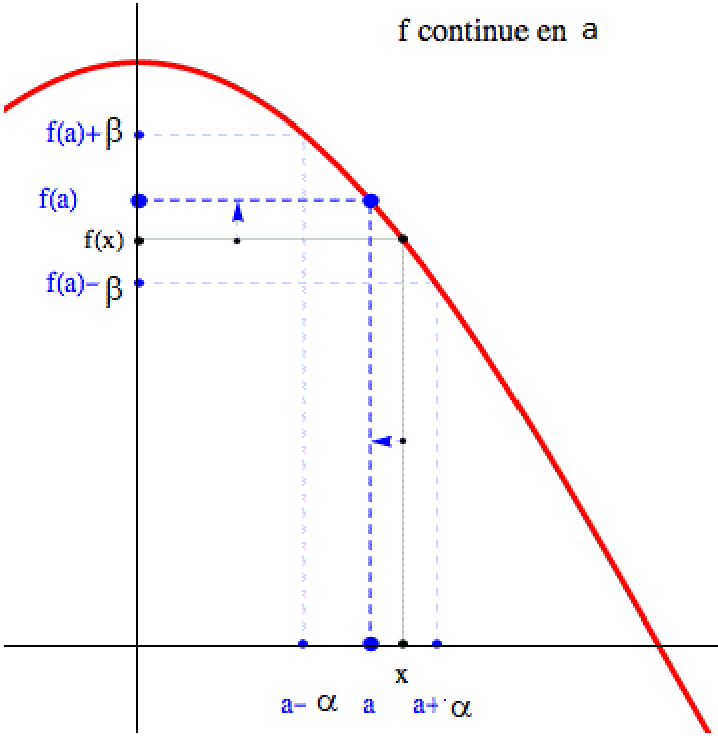
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

On dit que f est <u>continue</u> en a si et seulement si

pour tout réel $\beta > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

Si ($x \in I$ et $|x - a| < \alpha$) alors $|f(x) - f(a)| < \beta$



<u>N.B:</u> si f n'est pas continue en a

Alors elle est dite <u>discontinue</u> en a.

Application

En utilisant la définition, montrer que f est continue en a:

1) $f(x) = 3x + 7$, $a = 2$

2) $f(x) = -2x + 1$, $a = 3$

Théorème (admis)

Toute fonction constante est continue en tout réel a.
La fonction $x \longmapsto x$ est continue en tout réel a.
Toute fonction linéaire est continue en tout réel a.
Toute fonction affine est continue en tout réel a.
La fonction: $x \longmapsto x^2$ est continue en tout réel a.
La fonction: $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout réel non nul a.
La fonction: $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue en tout réel strictement positif a.
Toute fonction polynôme est continue en tout réel.
Toute fonction rationnelle est continue en tout réel où elle est définie.

Activité N°2 page 24

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en a.

1. $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 1 \quad ; \; a = 0.$
2. $f(x) = x^{30} - 3(x^2 + 2x + 1)^2 + \dfrac{1}{100} \quad ; \; a = \sqrt{2}.$

1. $f(x) = \dfrac{1}{-2x + 1} \quad ; \quad a = 0.3.$
2. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{(-x^2 + 3)^2} \quad ; \quad a = 1 .$

III. Continuité à gauche – Continuité à droite

Définition

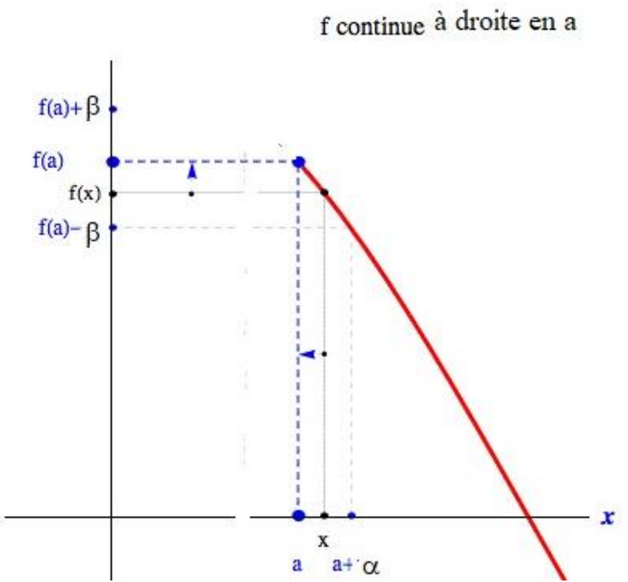
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme

[a, a+h[(h > 0).

On dit que f est <u>continue à droite</u> en a si et seulement si

pour tout réel $\beta > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

Si ($x \in [a, a+h[$ et $0 \leq x - a < \alpha$) alors $|f(x) - f(a)| < \beta$

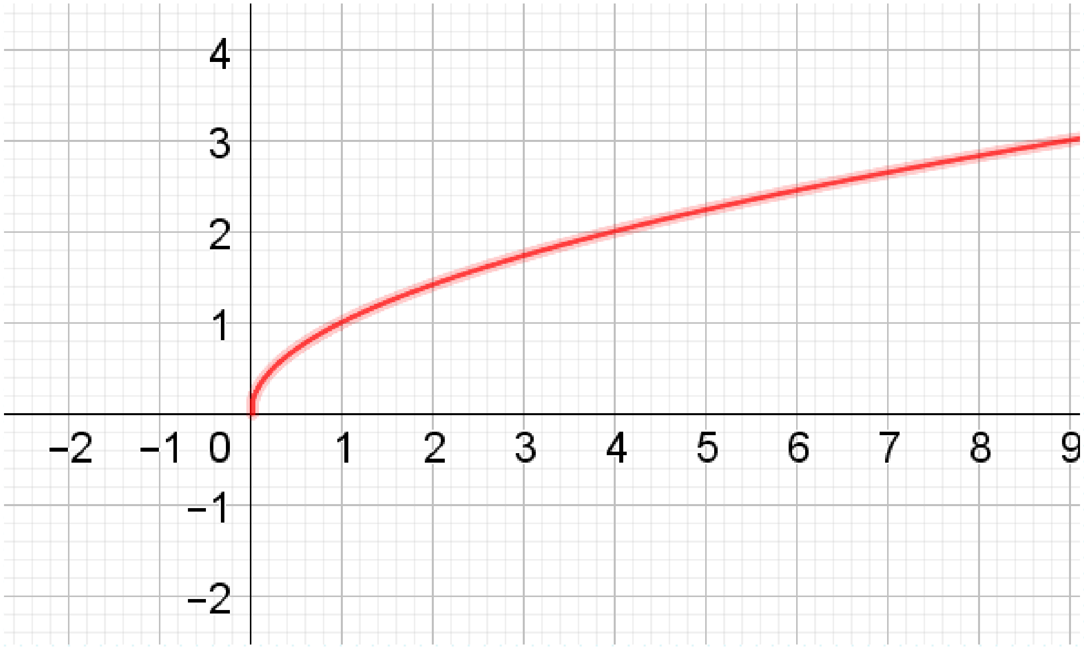


Définition

Exemple: **vérifier graphiquement que**

La fonction: x $\mapsto \sqrt{x}$ est continue à

droite en 0



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme

$]a - h , a]$ $(h > 0)$.

On dit que f est continue à gauche en a si et seulement si

pour tout réel $\beta > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

Si ($x \in]a - h , a]$ et $- \alpha < x - a \leq 0$) alors $|f(x) - f(a)| < \beta$

Exemple: **vérifier graphiquement que la fonction: $x \mapsto \sqrt{-x}$ est continue à gauche en 0.**

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

$$\text{f est continue en a} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{f est continue à droite en a} \\ \text{f est continue à gauche en a} \end{cases}$$

N.B:

La justification du théorème découle immédiatement de la définition.

Application

On pose $f(x) = |x^2 - x|$

Justifier la continuité de f en 1

IV. Continuité sur un intervalle

1) Définitions

• Soit a et b finis ou infinis.
Une fonction définie sur un intervalle]a, b[est dite continue sur]a, b[si elle est continue en tout réel de]a, b[.
• Soit a fini ou infini et b un réel.
Une fonction définie sur un intervalle]a, b] est dite continue sur]a, b] si elle est continue sur]a, b[et continue à gauche en b.
• Soit a un réel et b fini ou infini.
Une fonction définie sur un intervalle [a, b[est dite continue sur [a, b[si elle est continue sur]a, b[et continue à droite en a.
• Soit a et b deux réels.
Une fonction définie sur un intervalle [a, b] est dite continue sur [a,b] si elle est continue sur]a, b[, continue à droite en a et continue à gauche en b.

2) Conséquences

- **Toute fonction polynôme est continue sur IR.**
- **Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son domaine de définition.**
- **La fonction: $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$**
- **La fonction: $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$**

3) Théorème

Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I.
Si u et v sont continues sur I alors les fonctions u + v ; uv ; |u| ; ku (k réel) et u^n ($n \in IN^*$) sont continues sur I.

Exemples: **justifier la continuité de f sur I**

a) $f(x) = x^2 + 3x + 1 - \frac{5}{x}$ $\quad$ $I =]0, +\infty[$

b) $f(x) = \sqrt{x}\left(x^3 + 5x\right)$ $\quad$ $I = IR+$

c) $f(x) = (2\sqrt{x} + 1)^4$ $\quad$ $I = IR+$

d) $f(x) = \left|\frac{x^2-3x+5}{x^2+x+1}\right|$ $\quad$ $I = IR$

4) Théorème

- **Si u et v sont deux fonctions continues sur un intervalle I et tel que pour tout x$\in$I , v(x) $\neq$ 0**

  Alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont continues sur I.
- **Si u est une fonction continue et positive sur un intervalle I alors la fonction $\sqrt{u}$ est continue sur I.**

Exemples: Déterminer les intervalles sur les quels f est continue

a) $f(x) = \frac{1}{x^3-3x^2+4x-2}$

b) $f(x) = \frac{x^3+7x^2-3x+2}{2\sqrt{x}+7}$

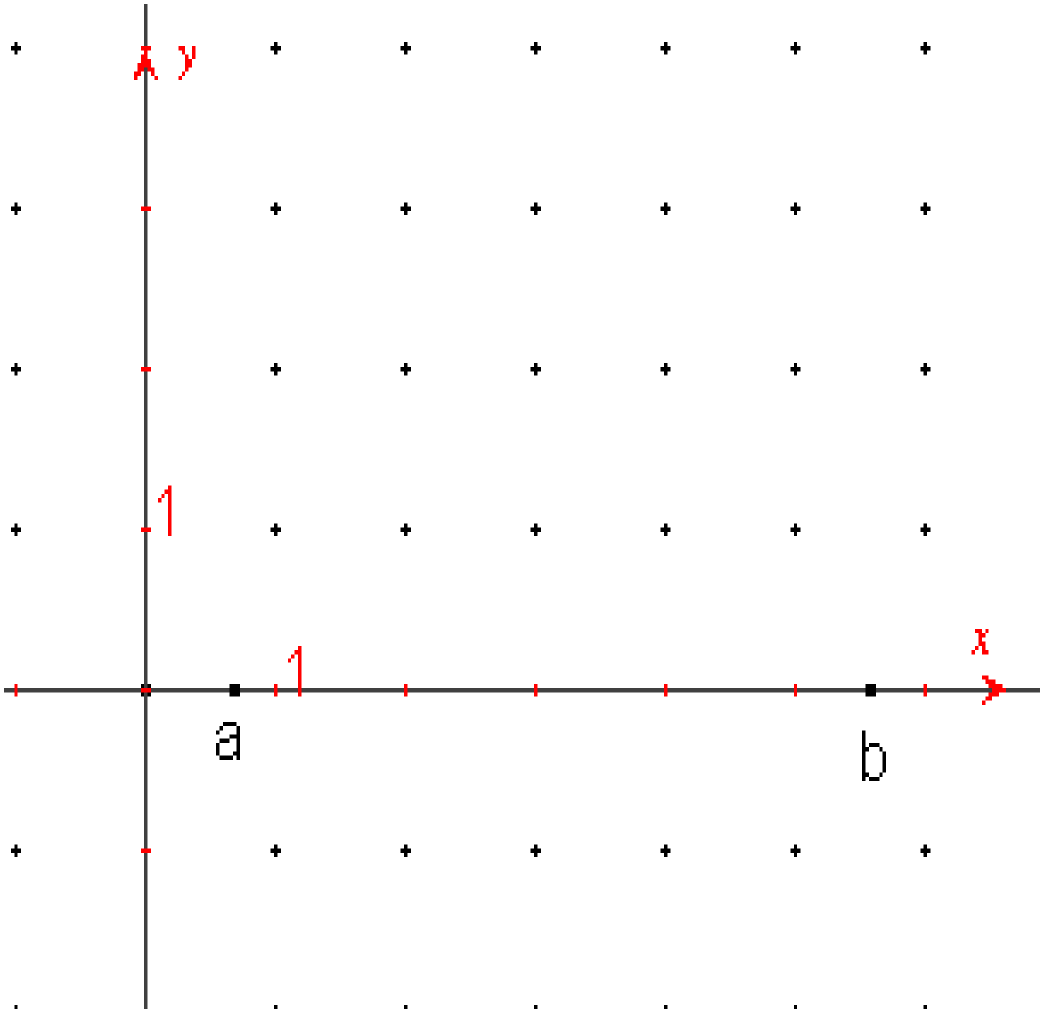
c) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

V. Image d'un intervalle par une fonction continue

Activité

Dans chaque figure représenter graphiquement, si c'est possible, une fonction f **définie** sur un intervalle [a, b] ($a < b$) et satisfaisant aux conditions indiquées ci-contre ; préciser en plus $f <[a, b]>$.

Figure N°1



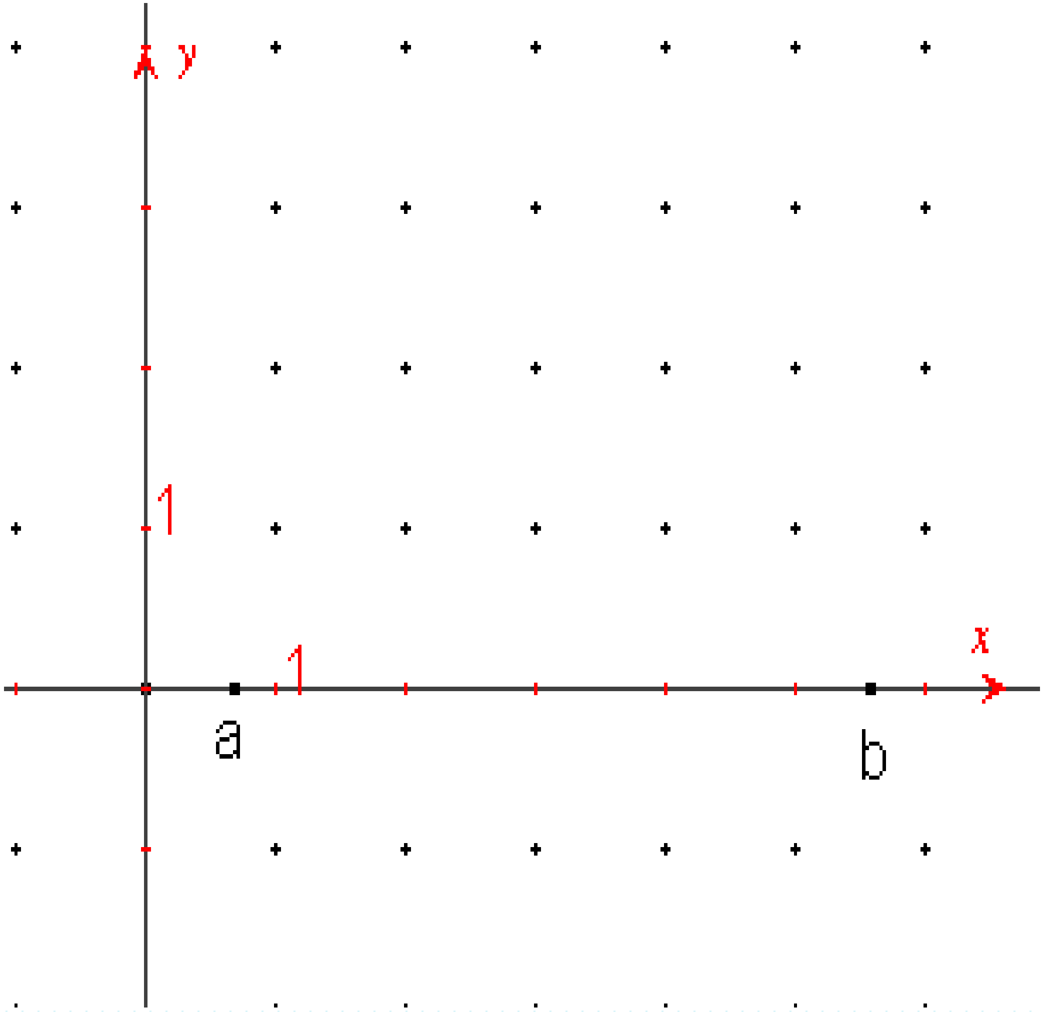
* f est continue sur [a, b]

* f<[a,b]> est un intervalle

* Compléter :

f<[a,b]> = …

Figure N°2

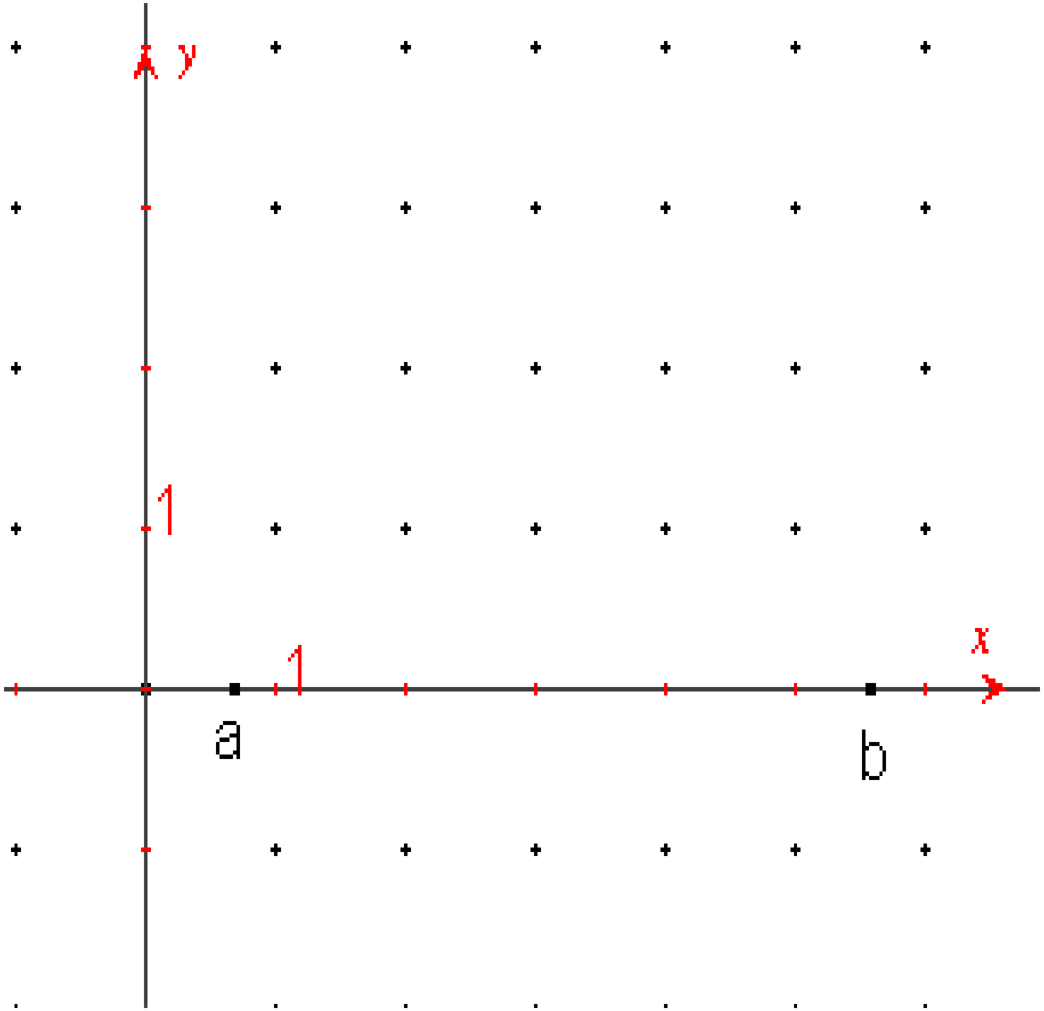


* f n’est pas continue
  sur [a, b]

* f<[a,b]> est un intervalle

* Compléter :
  f<[a,b]> = …

Figure N°3



* f n’est pas continue

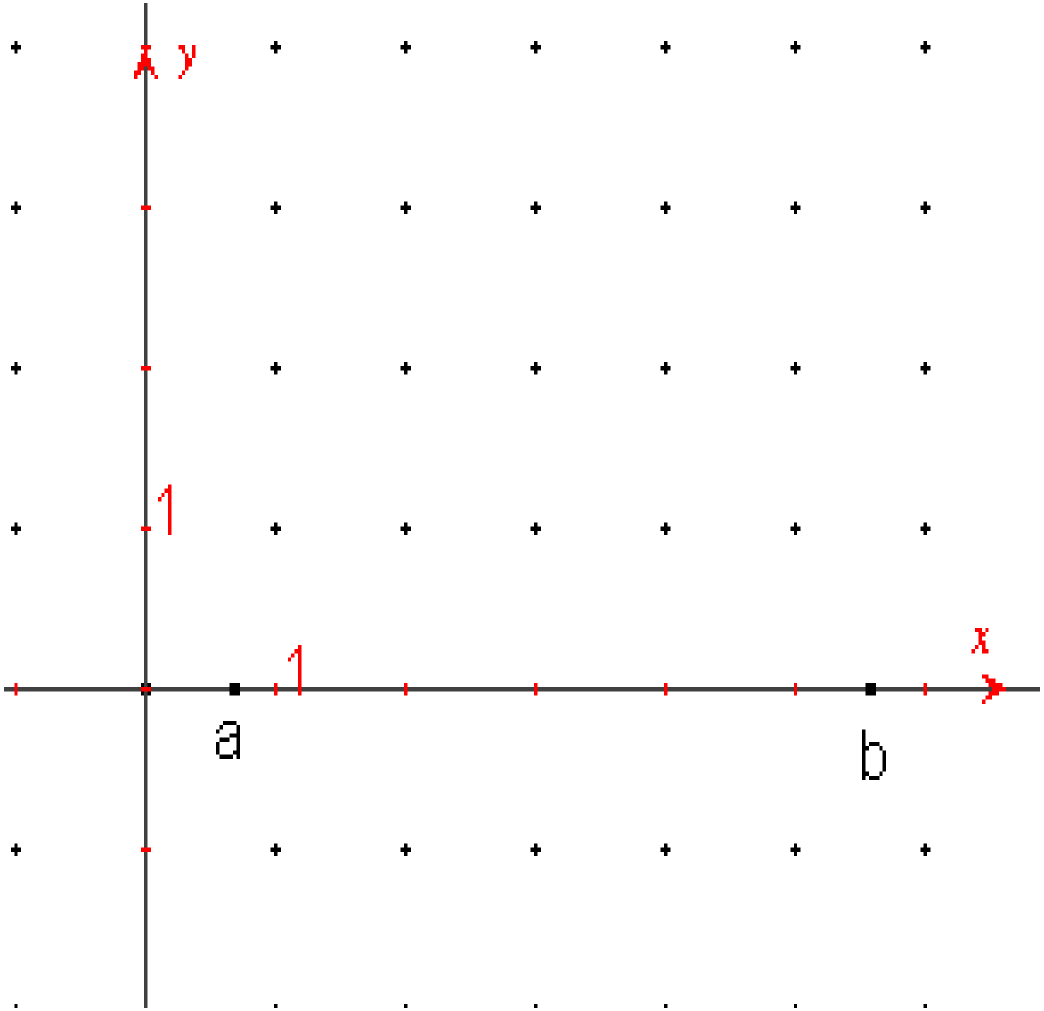
sur [a, b]

* f<[a,b]> n’est pas un intervalle

* Compléter :

f<[a,b]> = …

Figure N°4



* f est continue sur [a, b]

* f<[a,b]> n'est pas un intervalle

* Compléter :

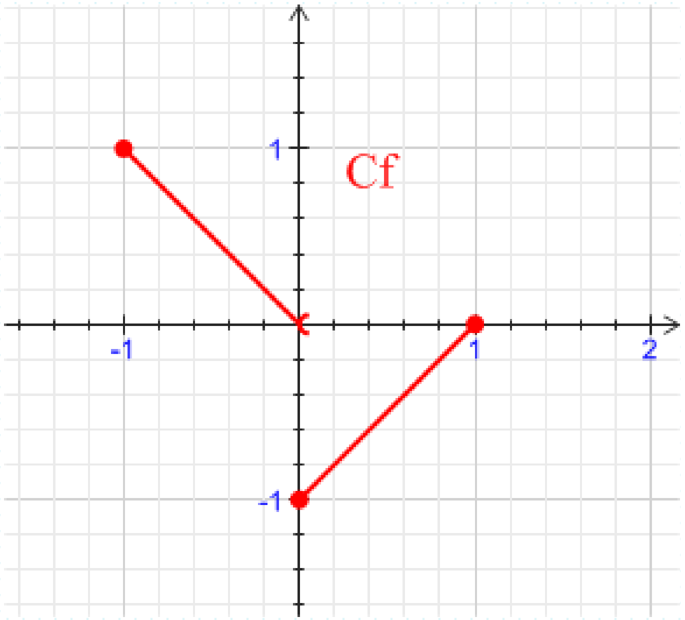
f<[a,b]> = …

Théorème (admis)

L'image d'un intervalle par une fonction **continue** est un intervalle

NB: La continuité est une condition suffisante et non pas nécessaire! (figure N°2)

Contre exemple:

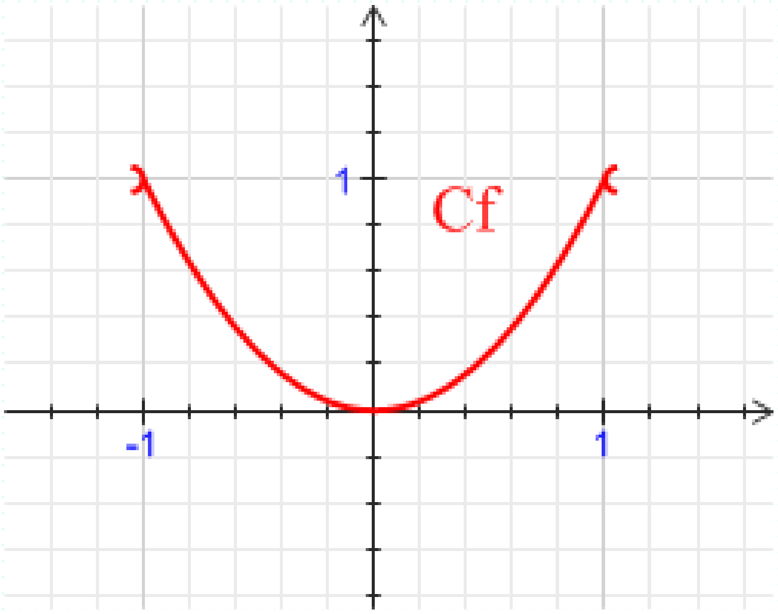


Théorème (admis)

L'image d'un intervalle **<u>fermé</u>** par une fonction **<u>continue</u>** est un intervalle **<u>fermé</u>**.

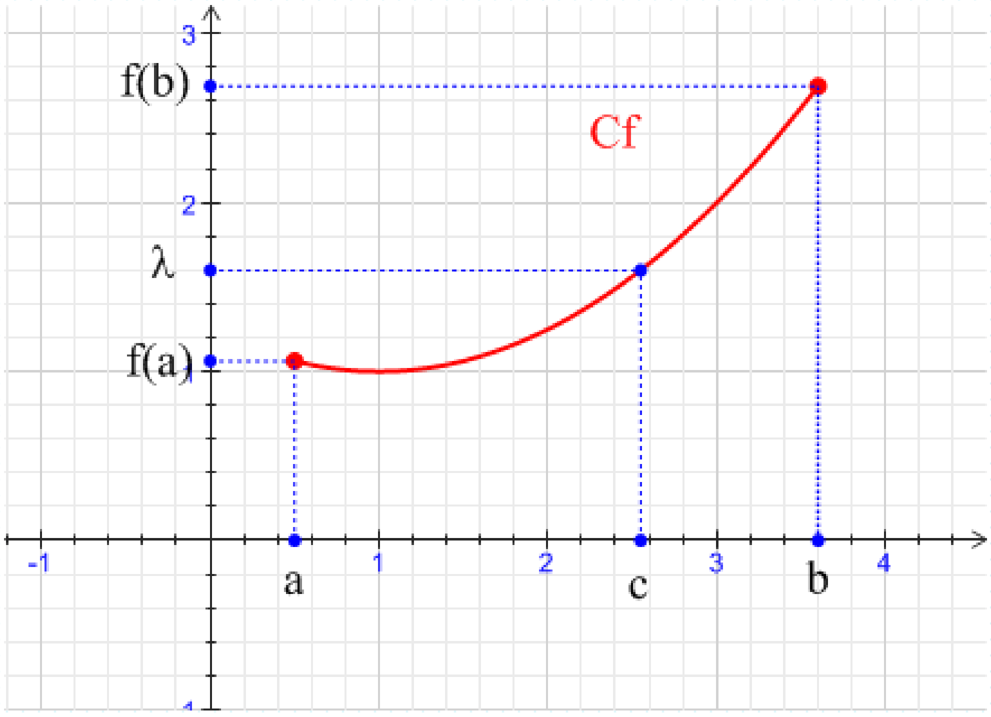
<u>NB:</u> L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue n'est pas nécessairement ouvert!

<u>Contre exemple:</u>

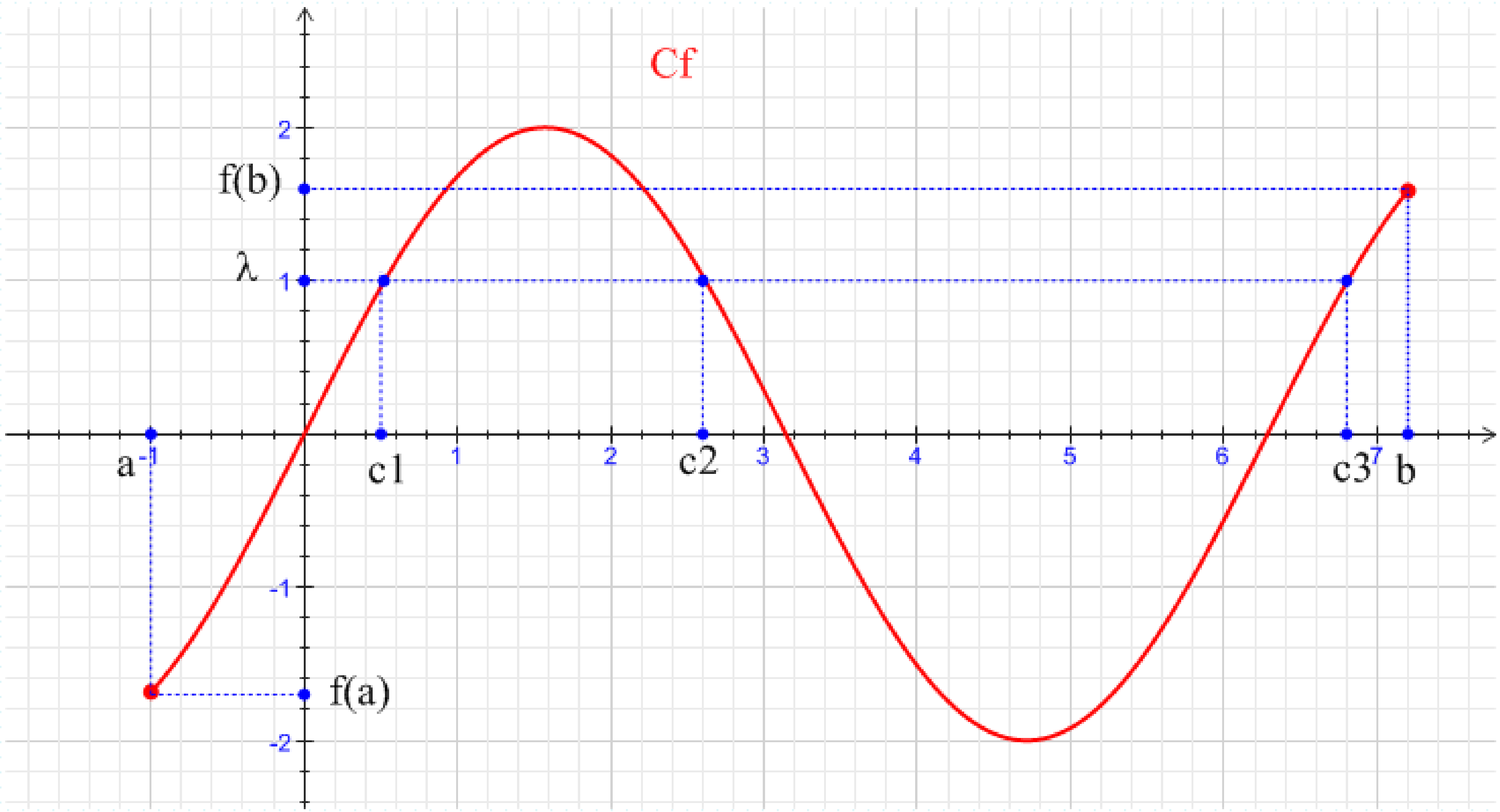


Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue sur un intervalle [a , b] alors pour tout réel λ, compris entre f(a) et f(b), il existe, au moins $c \in [a , b]$ tel que: **$f(c) = \lambda$**



NB: Le théorème des valeurs intermédiaires assure l’existence de c et non pas l’unicité!
L’unicité peut être assurée par la monotonie stricte de f.



Exercice N°1

Soit f une fonction continue sur [1, 4].
Montrer qu'il existe au moins un réel $c \in [1,4]$ tel que l'on ait : $2f(1) + 3f(4) = 5f(c)$.

Solution

Soit f une fonction continue sur [1, 4].
Montrer qu'il existe au moins un réel $c \in [1,4]$ tel que l'on ait : $2f(1) + 3f(4) = 5f(c)$.

• posons $\alpha = \dfrac{2f(1)+3f(4)}{5}$.

• $\alpha - f(1) = \dfrac{2f(1)+3f(4)}{5} - f(1) = \dfrac{3[f(4)-f(1)]}{5}$

• $\alpha - f(4) = \dfrac{2f(1)+3f(4)}{5} - f(4) = \dfrac{2[f(1)-f(4)]}{5}$

$[\alpha - f(1)][\alpha - f(4)] = \dfrac{-6}{25}[f(1)-f(4)]^2 \leq 0$.

$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [1,4] \\ \alpha \text{ compris entre } f(1) \text{ et } f(4) \end{cases}$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins $c \in [1,4]$ tq : $f(c) = \alpha$

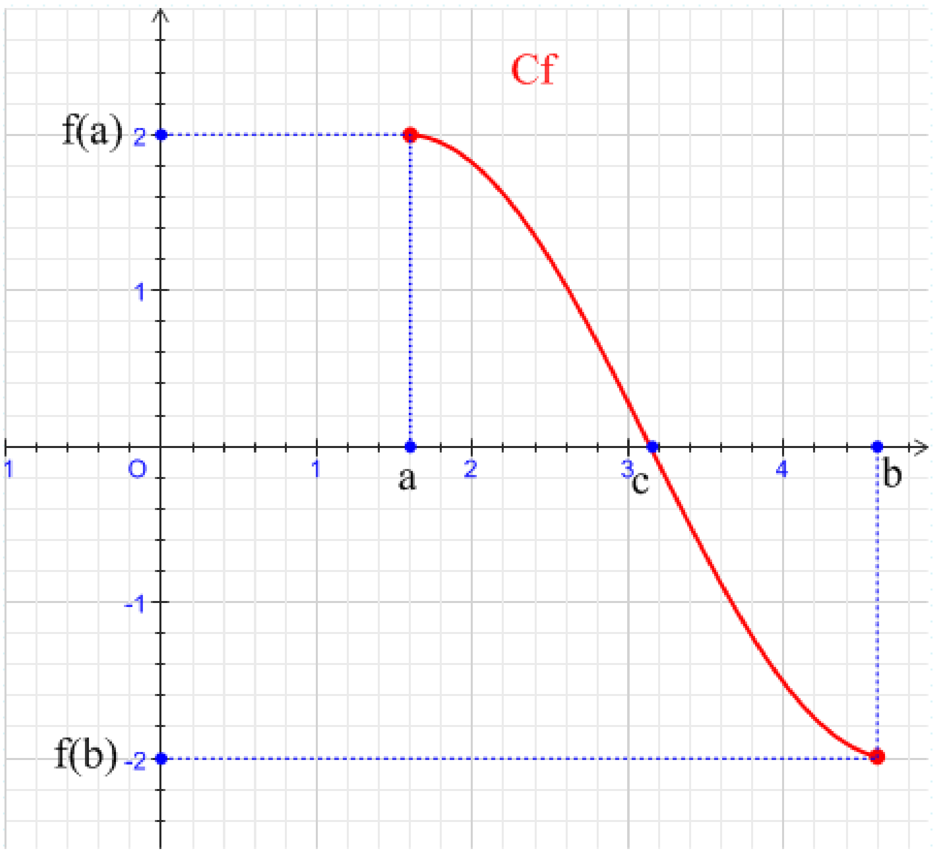
$f(c) = \alpha \Longleftrightarrow 2f(1) + 3f(4) = 5f(c)$

Corollaire

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f(a)\times f(b) \leq 0 \end{cases}$

alors il existe, au moins, un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c)=0$



Exercice N°2

Soit f une fonction continue sur [1,2] et à valeurs dans [3,6]

Montrer que l'équation :$f(x) = 3x$ admet au moins une solution $\alpha \in [1,2]$.

Exercice N°2

Soit f une fonction continue sur [1,2] et à valeurs dans [3,6]
Montrer que l'équation :$f(x) = 3x$ admet au moins une solution $\alpha\in[1,2]$.

- posons $\varphi(x) = f(x) - 3x$, $x \in [1,2]$
- $\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [1,2] \\ \text{la fct } x \longmapsto -3x \text{ est continue sur } \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \varphi$ est continue sur $[1,2]$.
- $\varphi(1) = f(1) - 3 \geq 0$ car $f(1) \in [3,6]$

$\varphi(2) = f(2) - 6 \leq 0$ car $f(2) \in [3,6]$

$\left\{\begin{array}{l} \varphi \text{ est continue sur } [1,2] \\ \varphi(1) \times \varphi(2) \leq 0 \end{array}\right.$

alors, d'après T.V.I, il existe au moins $\alpha \in [1,2]$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

$\varphi(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow f(\alpha) = 3\alpha$

Exercice N°3

1) Montrer que l'équation: $x^3 + x - 1 = 0$ admet dans $]0,1[$ au moins une solution α.
2) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α .

Exercice N°4

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ tel que : $f(a) = g(b)$ et $f(b) = g(a)$

Démontrer l'existence d'un réel $\alpha \in [a, b]$ tel que : $f(\alpha)=g(\alpha)$.