Enoncées

Exercice N°1

Résoudre dans IN^*xIN^* : $a\wedge b + avb = b + 9$

Exercice N°2

a, b et c sont des entiers naturels non nuls.

Sachant que $a\wedge b = 1$ Montrer que : $[a\wedge bc]x[b\wedge ac] = c\wedge ab$

Exercice N°3

Déterminer un entier naturel n possédant cinq diviseurs dans IN sachant que n – 16 est le produit de deux entiers naturels premiers.

Exercice N°4

Déterminer tous les entiers naturels m et n qui ont 45 diviseurs communs et tels que : m + n = 127008.

Exercice N°5

Montrer que $\forall n\in Z\backslash\{-3, 1, 3, 5\}$, le quotient : $(n^2 - 9)/(n^2 - 6n + 5)$ n'est pas un entier. S

Exercice N°6

Résoudre dans IN^2, $ppcm(a,b) = 120$ et $a^2 + b^2 = 801$ Ind S

Exercice N°7

1) Montrer que si deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux alors il est de même de $a^2 + b^2$ et ab.
   Ind1 Ind2 Ind3
2) Déterminer tous les couples (x,y) d'entiers naturels qui admettent 30 pour ppcm et vérifiant $x^2 + y^2 = 325$
   Ind1 Ind2

Exercice N°8

1) $p,n\in IN\backslash\{0,1\}$; $a = pn$ et $b = p(n-1)$. Calculer $a\wedge b$. Sol
2) $(x,y)\in(IN^*)^2$ tel que : $x\wedge y = x - y$. Déterminer l'expression de x et y. Sol
3) Résoudre dans $(IN^*)^2$ le système $\begin{cases} x\vee y = 30 \\ x\wedge y = x - y \end{cases}$ Résul
4) $(x,y)\in(IN^*)^2$, $A = 24x(5y + 3)$ $B = 15x(8y + 5)$ $C = 40x(3y + 2)$
   Démontrer que le pgcd de deux quelconques d'entre eux est égal à leur différence. Sol
   Calculer, en fonction de x et y pgcd(A, B, C) Sol

Exercice N°9

Soit a,b, a' et b' des entiers naturels vérifiant : $|ab' - a'b| = 1$.

Montrer que pour tous entiers naturels x et y on a : pgcd(x, y) = pgcd(ax + by, a'x + b'y)

Exercice N°10

Soient a et b des nombres premiers entre eux. Montrer que ab et a + b sont aussi premiers entre eux.

Exercice N°11

Soit p un entier naturel premier.

1) Démontrer que si k est un entier naturel tel que : $1 \leq k \leq p - 1$, le nombre C_n^k est divisible par p.

En déduire que pour tout $n\in IN$; $(n + 1)^p - n^p - 1$ est divisible par p.

2) Démontrer que pour tout $n \in IN$, $n^p \equiv n[p]$.

Pour quelles valeurs de n a-t-on : $n^{p-1} \equiv 1[p]$

NB. Le théorème de Fermat n'est pas autorisé.

Exercice N°12

1) Etablir que $\forall (a, b, q) \in Z^3$, $a \wedge b = b \wedge (a - bq)$
2) Montrer que $\forall n \in Z$, $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38$
3) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tel que : n + 2 divise $5n^3 - n$.
4) Quelles sont les valeurs passibles de $(5n^3 - n) \wedge (n+2)$?

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tel que : $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = 19$.

Exercice N°13

On donne un entier a ($a \geq 2$) et 2 entiers positifs m et n ($m > n$). On suppose que l'on a :$m = nq + r$ avec $0 < r < n$
On pose $M = a^m - 1$, $N = a^n - 1$ et $R = a^r - 1$.
On sait que $m \wedge n = n \wedge r$, a-t-on $M \wedge N = N \wedge R$?
Déterminer $M \wedge N$.
Application : M = 99…..9 (4679 chiffres) , N = 99….9 (2519 chiffres)
Calculer : $M \wedge N$

Exercice N°14

$n \in IN$, on pose : $A = n - 1$ et $B = n^2 - 3n + 6$

1) a) Montrer que $A \wedge B = A \wedge 4$.

b) Déterminer, suivant les valeurs de n, $A \wedge B$.

2) Pour quelles valeurs de n le nombre $\dfrac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$ est il un entier relatif ?

Exercice N°15

Déterminer l'ensemble des couples (a,b) d'entiers relatifs non nuls tel que : $a \wedge b + a \vee b = b + 9$

Exercice N°16

1) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x,y) solutions de l'équation :$5x - 4y = 2$
2) On considère les couples (a,b) solutions de l'équation,
a) Quelles sont les valeurs possibles de $a \wedge b$?
b) Montrer qu'il existe un seul couple (a,b) dont : $a \vee b = 60$ et $a \wedge b = 2$.

Exercice N°17

1) Résoudre dans Z^2 l'équation : $9x - 22y = 55$.
2) Déterminer les couples solutions de l'équation tel que : $x \wedge y = 55$

Exercice N°18

1) Résoudre dans Z^2 l'équation : $17q - 11p = 2$.
2) Résoudre dans Z l'équation : $x^2 \equiv 1[187]$

Exercice N°19

a,b, p et q sont des entiers relatifs.

a) Supposons que $a = 9p + 4q$ et $b = 2p + q$, démontrer que les entiers a et b d'une part et p et q d'autre part ont le même pgcd.

b) Démontrer que les entiers $9p + 4$ et $2p + 1$ sont premiers entre eux, quel est leur ppcm ?

c) Déterminer le pgcd des entiers relatifs $9p + 4$ et $2p - 1$ en fonction des valeurs de p.

Exercice N°20

1) Déterminer l'ensemble U des entiers relatifs n tel que $n + 2$ divise $2n - 1$.
2) Montrer que $\forall n \in Z$, $n + 2$ et $2n^2 + 3n - 1$ sont premiers entre eux.
3) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs $n \neq -2$ tel que : $\dfrac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$ soit un entier relatif.

Exercice N°21

Montrer que tout entier premier ≥ 3 est de la forme $4n - 1$ ou $4n + 1$.

Exercice N°22

Soit a et b deux entiers naturels donnés. On se propose de résoudre, dans Z, le système : $\begin{cases} x \equiv a\,[9] \\ x \equiv b\,[11] \end{cases}$

1) Démontrer que toutes les solutions de ce système sont congrues à un même nombre modulo 99. (on pourra utiliser l'identité de Bézout)
2) Déterminer toutes les solutions de ce système.

Exercice N°23

1) Déterminer les restes de la division euclidienne par 5 du nombre 2^p et du nombre 3^p pour chacune des valeurs 1, 2, 3 et 4 de l'entier naturel p. En déduire les restes de la division par 5 des nombres 2^p et 3^p pour tout entier naturel p.
2) Utiliser les résultats précédent pour :

a) Trouver les restes de la division par 5 du nombre 2^{14} et du nombre 3^{10}.
b) Montrer que, pour tout entier naturel n, le nombre :$2 \times 3^{4n+1} - 2^{4n}$ est divisible par 5.

Exercice N°24

Soit $n \in IN^*$.

1) Montrer que tout diviseur commun aux nombres $5n - 3$ et $n + 1$ est un diviseur de 8.
2) En déduire que $5n - 3$ et $n + 1$ sont premiers entre eux si n est pair.
3) Déterminer l'ensemble des entiers n tels que l'on ait : $(5n - 3) \wedge (n + 1) = 8$.

Exercice N°25

Démontrer que $\forall n \in IN$, n^3 est de la forme $7k$, $7k + 1$ ou $7k - 1$.

Exercice N°26

On définit la suite U par : $U_1 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + 8n$.
Montrer que pour tout $n \in IN$, U_n est un carré parfait.

Exercice N°27

Déterminer les paires (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que : $2m + 7d = 11$ où $m = a \vee b$ et $d = a \wedge b$

Exercice N°28

Trouver tous les entiers naturels diviseurs du nombre 108.
Trouver tous les couples (x,y) d'entiers naturels tel que : $x \wedge y = d$ et $x \vee y = m$ avec $m - 3d = 108$, $10 < d < 15$.

Exercice N°29

Pour tout $(x, y) \in Z^2$ on pose $f(x, y) = (4x + 2y + 12)^2 - 4(x + y + 4)^2$.
Résoudre dans Z^2 les équations :

a) $f(x, y) = 0$ b) $f(x, y) = 4$.

Exercice N°30

Démontrer que :

1) $\forall n \in IN$, $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.
2) $\forall n \in IN$, $n^3 - n$ est divisible par 6.
3) Si a, b et c ne sont pas multiple de 3 alors $a^2 + b^2 + c^2$ est multiple de 3.
4) $\forall n \in IN$, $n(n^2 + 5)$ est divisible par 6.

Exercice N°31

1) En remarquant que 999 = 27x37 montrer que $\forall n \in IN$, $10^{3n} \equiv 1[37]$.
2) En déduire le reste de la division euclidienne par 37 de $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$.

Exercice N°32

Pour quelles valeurs de n :

1) $10^{2n+4} - 2x10^{n+2} + 1$ est multiple de 11.
2) $5^{6n} + 5^n + 2$ est multiple de 7.
3) $n^3 - 3n^2 - 2$ est multiple de 7.
4) $n + 7$ est un multiple de $n - 5$.

Exercice N°33

1) Démontrer la proposition suivante : $\forall x \in Z$, $x \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 4$
2) Démontrer la proposition suivante : $\forall (x, y) \in Z^2$, $x \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow x^2 - 3y^2 \not\equiv 0 \pmod 4$
3) Démontrer que : $x^2 \equiv x \ (p) \Rightarrow \forall n \in IN^*$, $x^n \equiv x \ (p)$

Exercice N°34

$(a, b) \in Z^2$, p premier

1) Rappeler le développement de $(a + b)^p$, en déduire que $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$

2) En déduire : $(a + b)$ multiple de p $\Leftrightarrow a^p + b^p$ multiple de p

3) Trouver tous les entiers relatifs x tel que : $\begin{cases} -10 \le x \le 10 \\ x^7 + 128 \equiv 0 \pmod 7 \end{cases}$

Exercice N°35

Démontrer que :

1) Si p est un entier pair alors $p^2 \equiv 0 \pmod{2p}$.
2) Si p est un entier impair alors $p^2 \equiv p \pmod{2p}$.
3) Si p est un entier multiple de 3 alors $p^2 \equiv 0 \pmod{3p}$.

Exercice N°36

Sachant que n s'écrit en base décimale abcd et que bcda est divisible par 7.

1) a) Montrer que :si a = 0 ou a = 7 alors n est divisible par 7.

b) Montrer que : 10n – 3a est divisible par 7, en déduire que si n est divisible par 7 alors a = 0 ou a = 7.

2) On suppose que l'on a : a = 7, b = d et c = 0.

Déterminer n pour qu'il soit divisible par 3.

Exercice N°37

Soit deux entiers a et b ($a \ge b > 0$) et r le reste de la division euclidienne de a par b. Démontrer que $2r < a$.

Exercice N°38

Soit : $A = n^3 + 3n^2 - 7$ et $B = n + 1$ deux nombres entiers définis pour n entier > 2.

a) Montrer que tout diviseur commun à A et B divise 5.
b) Déduire, de ce qui précède, quelle particularité doit présenter n pour que A et B admettent pour pgcd 5.

Exercice N°39

Déterminer $x \in Z$ pour que $\frac{x^2}{x-3}$ soit un entier relatif.

Exercice N°40

Montrer que la fraction $\frac{2n+1}{2n^2+2n}$ est irréductible ($n \in IN^*$). S

Exercice N°41

1) Trouver deux constantes a et b tel que l'on ait : $\forall k \in Z$, $9k + 4 = a(2k - 1) + 8 + k$ et $2k - 1 = b(k + 8) - 17$.
2) En déduire que :
a) Si $k \equiv 9 \pmod{17}$ alors $(9k+4) \wedge (2k - 1) = 17$
b) Si $k \not\equiv 9 \pmod{17}$ alors $9k + 4$ et $2k - 1$ sont premiers entre eux.

Exercice N°42

Déterminer tous les entiers positifs n tels que $5^{n-1} + 3^{n-1}$ divise $5^n + 3^n$.

Exercice N°43

Montrer que la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est toujours irréductible. Ind

Exercice N°44

Montrer que $2x + 3$ est un multiple de 11 si, et seulement si $5x + 2$ l'est. Ind

Exercice N°45

Soit $p > 3$ un nombre premier. Montrer que $p^2 - 1$ est un multiple de 12. Ind