Divisibilité dans IN

Cours élaboré par le prof: Chouihi

Principe de récurrence

Activité

Soit U la suite réelle définie par :

Pour tout $n \in IN$, $U_n = 3^{2n+2} + 2^{6n+1}$.

On se propose de démontrer la propriété P_n : « pour tout $n \in IN$, U_n est divisible par 11 »

a) Vérifier P_0 est vraie.

b) Soit $n \in IN$, on suppose que P_n est vraie, Montrer que P_{n+1} est vraie

c) En déduire que P_n est vraie pour tout $n \in IN$

Commentaire : Le procédure précédant est appelé raisonnement par récurrence.

Cas général (principe de récurrence)

Soit n_0 un entier naturel et P_n une propriété qui dépend de n, $n \geq n_0$.

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- P_{n0} est vraie.
- Si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie

Alors P_n est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exercice N° 1

1/ a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel p, $2^{3p} - 1$ est un multiple de 7.

b) En déduire que $2^{3p+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3p+2} - 4$ est un multiple de 7.

2/ Soit n un entier naturel, déterminer le reste de la division euclidienne de l'entier $2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$ par 7 dans les deux cas suivants :

a) n est un multiple de 3.

b) n n'est pas un multiple de 3.

3/ Le nombre $2^{2009} + 4^{2009} + 8^{2009}$ est il divisible par7?

Exercice N°2

Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

Exercice N° 3

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ et $S'_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$

1) a) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4

b) Calculer S'_1, S'_2, S'_3 et S'_4

2) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S'_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

III. Divisibilité dans IN

1. Définition

Soit a et d deux entiers naturels tels que d$\neq$ 0.

On dit que a est divisible par d s'il existe un entier naturel k tel que $a = k.d$

Propriétés

Pour tous entiers naturels a, b et c tels que a et b soient non nuls

1. **1 divise a et a divise a.**
2. **Si a divise b et b divise a alors a = b.**
3. **Si a divise b et b divise c alors a divise c.**

Soit a et b deux entiers naturels et c un entier naturel non nul.

4. **Si c divise a et b alors c divise a + b et a - b et $\alpha a + \beta b$, pour tous entiers (α, β)**
5. **Si c divise a et ne divise pas b alors c ne divise pas a + b.**

Justifier ces propriétés

Applications

1) Trouver n dans IN pour que (n+8) soit divisible par n et (3n+24) soit divisible par n − 4.

2) Soient x et y des entiers.
Montrer que 2x + 3y est divisible par 7 si et seulement si 5x + 4y l'est.

3) Soit x = 8n + 3 et y = 5n + 2, où n est un entier naturel.
Montrer que x et y sont premiers entre eux.

4) Démontrer que si un entier abc est divisible par 27 alors l'entier abc – bca est divisible par 27.

2. PGCD

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Le plus grand commun diviseur de a et b est l'entier d, noté $a \wedge b$ et tel que:

- d divise a et b
- tout diviseur k de a et b est inférieur ou égal à d.

Applications

1) Trouver une fraction d'entiers naturels telle que la somme du numérateur et du dénominateur soit égale à 84 et que leur PGCD soit 7.

2) Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre $\frac{21n+5}{14n+3}$ est irréductible

3) Soit A = 2n – 1 et B = 9n + 4 , $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que $A \wedge B = A \wedge 17$

b) Déterminer les entiers n tel que $A \wedge B = 17$

Théorème

Si r est le reste de la division euclidienne de a par b, alors :

$$a \wedge b = b \wedge r$$

Démontrer ce théorème

Propriétés

Soit a et b deux entiers naturels non nuls

- Si b divise a alors : $a \wedge b = b$
- Le plus grand commun diviseur de deux entiers naturels est le dernier reste non nul de la suite des divisions euclidiennes dans l'algorithme d'Euclide.
- l'ensemble des diviseurs de a est noté $\mathbf{D_a}$
- Si a est un diviseur de b, alors $D_a \subset D_b$.
- On dit que a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$.
- L'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs de leur pgcd.
- Si d est un diviseur commun de a et b , alors d divise $a \wedge b$
- Pour tout entier naturel non nul k , $(ka) \wedge (k\,b) = k\,(a \wedge b)$.
- Soit a et b deux entiers naturels non nuls et $d = a \wedge b$.

  Les entiers a' et b' tels que a = da' et b = d b' sont premiers entre eux.

Activité

1) a) A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer le pgcd de 1128 et 508

b) Déterminer une solution particulière de l'équation dans IN²: $1128x - 508y = 4$

2) Déterminer une solution particulière de l'équation dans IN²: $1100x - 147y = 1$

3) Déterminer les couples (a,b) d'entiers naturels solution du système S: $\begin{cases} a + b = 208 \\ a \wedge b = 13 \end{cases}$

Lemme de Gauss

Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls tel que a et b sont premiers entre eux.

1) **Déterminer $(ac)\wedge(bc)$**
2) **En déduire que si a divise bc alors a divise c**

Lemme de Gauss:

a, b et c des entiers naturels non nuls.

$$\begin{cases} a \text{ divise } bc \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \quad \text{alors } a \text{ divise } c$$

Activité N°3 page 125

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

1. Montrer que si 4 divise ab et si a est impair alors 4 divise b.

2. Montrer que si 16 divise ab et si a est impair alors 16 divise b.

Activité N°4 page 135

1. Déterminer tous les entiers naturels a et b tels que $3(a - 2) = 2(b - 3)$.
2. Déterminer tous les entiers naturels a et b tels que $5a = 3(b + 10)$.
3. Déterminer tous les entiers naturels a et b tels que $22(a - 1) = 26(b - 3)$.

Activité N°6 page 135

Soit a un entier naturel.

1. Montrer que $a(a + 1)(a + 2)$ est divisible par 6.

2. Montrer que $a(7a + 1)(2a + 1)$ est divisible par 6.

Exercice

a. Déterminer tous les entiers naturels x et y tels que : $3(x - 5) = 5(y - 3)$.

b. Déterminer tous les entiers naturels x et y tels que : $2x = 3(y + 10)$.

c. Déterminer tous les entiers naturels x et y tels que : $42(x - 1) = 54(y - 3)$.

3. PPCM

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Le plus petit commun multiple à a et b est l'entier naturel non nul m tel que

$$\begin{cases} \text{m est un multiple de a et b} \\ \text{tout multiple non nul de a et b est supérieur ou égal à m} \end{cases}$$

On note alors $m = a \vee b$

Activité N°3 page 136

Un phare émet deux signaux différents entre minuit et six heures du matin un signal rouge toutes les 25 secondes et un signal jaune toutes les 2 minutes.
Ces deux feux sont émis simultanément à minuit.
A quelles heures y aura-t-il simultanément un feu rouge et un feu jaune ?

Propriétés

Soit a et b deux entiers naturels non nuls

- **Si b divise a alors $a \vee b = a$**
- **Pour tout entier naturel non nul k ,**

$$(k\,a) \vee (k\,b) = k(a \vee b)$$

- $(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$

Exercice

Résoudre les systèmes suivants, sachant que a et b sont des entiers naturels.

a) $\begin{cases} ab = 168 \\ a \vee b = 24 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a + b = 15 \\ a \vee b = 18 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a + b = 56 \\ a \vee b = 105 \\ a \leq b \end{cases}$

IV. Les nombres premiers

1. Définition

Un entier naturel **$p \geq 2$** est dit **<u>premier</u>** si ses seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont 1 et lui-même.

<u>NB</u>: On convient que 1 n'est pas un nombre premier.

Un entier naturel qui n’est pas premier est dit composé.

Application N°1

Soit n un entier naturel.

1. Factoriser $5n^2 – 9n$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de n, l’entier $5n^2 – 9n$ est-il premier ?

Application N°2

1/ Soit p un entier naturel non nul, montrer que l'un des entiers p, p+2, p+4 est divisible par 3.
2/ En déduire qu'il existe un unique triplet d'entiers naturels (p, p+2, p+4) tel que p, p+2, p+4 soient premiers.

1) si $p=3k$ alors $p \in \dot{3}$ si $p=3k+1$ alors $p+2=3(k+1) \in \dot{3}$

si $p=3k+2$ alors $p+4=3(k+2) \in \dot{3}$ cqfd.

2) d'après 1) l'un des entiers $\in \dot{3}$ or le seul nombre premier $\in \dot{3}$ est 3 donc : $p=3 \longrightarrow p+2=5$ et $p+4=7$

d'où $(3, 5, 7)$

Théorème

* Si n est un entier naturel distinct de 1, alors le plus petit diviseur de n distinct de 1 est premier.
* Tout entier naturel diffèrent de 1 admet au moins un diviseur premier.

Demonstration:

- si n est premier alors le resultat est immédiat.
- suppose que n n'est pas premier.

designons par d le plus petit diviseur de n ≠ de 1.

Si d n'est pas premier alors il admet un diviseur d' tq : $1 < d' < d$

$\left.\begin{array}{l} d' \text{ divise } d \\ d \text{ divise } n \end{array}\right\} \Rightarrow d' \mid n$ donc d' est un diviseur de n tq : $1 < d' < d$

ce qui contredit le fait que d est le plus petit diviseur de n ≠ 1 donc d est premier.

Activité

Soit $n > 1$ un entier naturel composé. On désigne par p le plus petit diviseur de n, distinct de 1. Montrer que $p^2 \leq n$.

<u>Dem :</u> $p \mid n \Longrightarrow n = pq$ avec $q \geq p$ (car p est le plus petit diviseur de n)

$p \leq q \xrightarrow{\times p} p^2 \leq pq$

$\Longrightarrow \underbrace{p^2 \leq n}$

Théorème

Un entier naturel n >1 est composé, si et seulement si, il admet un diviseur premier inferieur ou égal a $\sqrt{n}$.

Ainsi pour prouver qu'un nombre est premier, il suffit de vérifier qu'il n'est divisible par aucun entier premier inferieur ou égal à sa racine carrée.

Exemple: Vérifier que 2011 est premier.

on a : $\sqrt{2011} \simeq 44,8$

q	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
r	1	1	1	2	9	9	5	16	10	10	27	13	2	33

donc 2011 et premier .

Théorème d'Euclide

Il existe une infinité de nombres premiers.

(par l'absurde) supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers : $p_1, p_2, \ldots, p_n$. posons $p = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$

si p n'est pas premier alors il existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tq :

p_i divise p .

$\left.\begin{array}{l} p_i \text{ divise } p_1 p_2 \cdots p_n \\ p_i \text{ divise } p_1 p_2 \cdots p_n + 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow p_i \text{ divise } (p_1 p_2 \cdots p_n + 1) - (p_1 p_2 \cdots p_n) = 1$

$\longrightarrow p_i = 1$ absurde car p_i premier

donc p est premier et comme $p > p_i$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

donc p est un nombre premier $\notin \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$

alors il y a une infinité de nombres premiers.

Activité N°12 page 147

1. Vérifier que le 3ème nombre premier est inférieur à: $2 \times 3 + 1$.
2. Vérifier que le 4ème nombre premier est inferieur à: $2 \times 3 \times 5 + 1$.
3. Soit n un entier naturel non nul, on désigne par p_n le nème nombre premier.
   Montrer que: $p_n \leq p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_{n-1} + 1$.

1) $2 \times 3 + 1 = 7 > 5$

2) $2 \times 3 \times 5 + 1 = 31 > 7$

3) supposons $p_n > p_1 \times p_2 \cdots \times p_{n-1} + 1$

$\begin{cases} p_1 p_2 \cdots p_{n-1} + 1 \text{ est premier} \\ p_1 p_2 \cdots p_{n-1} + 1 > p_{n-1} \end{cases}$

$\longrightarrow$ $\begin{cases} p_{n-1} < p_1 p_2 \cdots p_{n-1} + 1 < p_n \\ p_1 p_2 \cdots p_{n-1} + 1 \text{ premier} \end{cases}$ ce qui est absurde

car p_{n-1} et p_n sont deux nombres premiers consécutifs

$\longrightarrow p \leq p_1 \times p_2 \cdots \times p_{n-1} + 1$

2. Décomposition en facteurs premiers

Théorème

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, ils existent des nombres premiers, deux à deux distincts, $p_1, p_2, \ldots p_k$ et des entiers naturels non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tels que : $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ et n se décompose, d'une manière unique, sous la forme :

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i} = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \ldots \times p_k^{a_k}$$

C'est la décomposition en facteurs premiers de n.

Petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier et a un entier naturel.

p divise $a^p - a$.

Corollaire

Si $\begin{cases} p \textit{ est premier} \\ p \textit{ ne divise pas } a \end{cases}$ alors p divise $a^{p-1} - 1$

Application

1/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^5 - n$ est divisible par 30.
2/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^7 - n$ est divisible par 42.

1) On a : $30 = 2 \times 3 \times 5$. donc il suffit de prouver que $n^5 - n \in \dot{2} \cap \dot{3} \cap \dot{5}$

- 5 premier donc, d'après Fermat, $n^5 - n \in \dot{5}$
- $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2-1)(n^2+1) = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$
- $\begin{cases} \text{si } n = 2k \text{ alors } n^5 - n \in \dot{2} \\ \text{si } n = 2k+1 \text{ alors } n - 1 = 2k \text{ donc } n^5 - n \in \dot{2} \end{cases}$
- $\begin{cases} \text{si } n = 3k \text{ alors } n^5 - n \in \dot{3} \\ \text{si } n = 3k+1 \text{ alors } n - 1 = 3k \text{ donc } n^5 - n \in \dot{3} \\ \text{si } n = 3k+2 \text{ alors } n+1 = 3(k+1) \text{ donc } n^5 - n \in \dot{3} \end{cases}$

cl : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^5 - n \in \dot{30}$.

2) $42 = 2 \times 3 \times 7$

Conséquences

- $Si \begin{cases} \text{p divise ab} \\ \text{p est premier} \end{cases}$ alors p divise a ou p divise b
- Si b est divisible par a alors tout nombre premier divisant a est un diviseur de b.
- Soit a et b deux entiers naturels et p un nombre premier.

$$Si \begin{cases} \text{p divise ab} \\ \text{p } ne\ divise\ pas\ b \end{cases} \quad \text{alors p divise a}$$

- Si $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \ldots \times p_k^{a_k}$ est la décomposition en facteurs premiers de n alors le nombre de diviseurs naturels de n est N= $\prod_{i=1}^{k}(1 + a_i)$
- Un entier naturel n est un carré parfait si et seulement si les exposants des p_i dans la décomposition en facteurs premiers de n sont pairs.

Exercice N°6

p est un nombre premier strictement supérieur à 3.
Montrer que p² + 11 est divisible par 12.

1ère idée :

$$p^2+11 = p^2 - 1 + 12$$

$$= (p-1)(p+1) + 12$$

d'autre part : $\left.\begin{array}{l} p \text{ premier} \\ p > 3 \end{array}\right\} \longrightarrow p \text{ impair} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} p-1 = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ p+1 = 2k',\ k' \in \mathbb{N} \end{array}\right.$

$\longrightarrow (p-1)(p+1) = 4kk' \in \mathcal{M}_4$. ①

• $\left.\begin{array}{l} p \text{ premier} \\ p > 3 \end{array}\right\} \longrightarrow p \notin \mathcal{M}_3 \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} p = 3k+1 \\ \text{ou} \\ p = 3k+2 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} p-1 = 3k \in \mathcal{M}_3 \\ \text{ou} \\ p+1 = 3(k+1) \in \mathcal{M}_3 \end{array}\right.$

$\longrightarrow (p-1)(p+1) \in \mathcal{M}_3$ ②

① et ② $\xrightarrow{3 \wedge 4 = 1} (p-1)(p+1) \in \mathcal{M}_{12} \longrightarrow p^2 + 11 \in \mathcal{M}_{12}$

Exercice N°6

p est un nombre premier strictement supérieur à 3.
Montrer que $p^2 + 11$ est divisible par 12.

<u>2ème idée</u> :

posons $p = 12k + r$ avec $0 \leq r < 12$

comme (p premier et $p > 3$) donc $r \in \{1, 5, 7, 11\}$

$p^2 + 11 = 12^2 k^2 + 2 \times 12 k r + r^2 + 11 = 12(12k^2 + 2k) + (r^2 + 11)$

r	1	5	7	11
r^2+11	12	36	60	132

$\Rightarrow r^2 + 11 \in \dot{12}$

$\Rightarrow \underline{p^2 + 11 \in \dot{12}}$.

Exercice N°7

Existe-t-il un entier naturel n tel que : $3^n + 1600$ est un carré parfait ?

supposant qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tq : $3^n + 1600 = a^2$

$3^n + 1600 = a^2 \Longleftrightarrow a^2 - 40^2 = 3^n$

$\Longleftrightarrow (a-40)(a+40) = 3^n \Longleftrightarrow \begin{cases} a - 40 = 3^k \\ a + 40 = 3^{n-k} \end{cases}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

$\xrightarrow{(-)} 80 = 3^{n-k} - 3^k \xleftrightarrow{\text{pour } k \neq 0} 80 = 3(3^{n-k-1} - 3^{k-1})$

$\longrightarrow$ 3 divise 80 absurde

pour $k = 0$ $\quad 80 = 3^n - 1 \Longleftrightarrow 3^n = 81 = 3^4 \Longleftrightarrow n = 4$

conclusion $n = 4$

Exercice N°9

Soit a□IN*. Trouver les entiers naturels n tel que : $n^3 + 3n^2 + a$ divise $4n^2 + a$.

n^3+3n^2+a divise $4n^2+a \longrightarrow n^3+3n^2+a \leq 4n^2+a$

$\longrightarrow n^3-n^2 \leq 0 \Longleftrightarrow n^2(n-1) \leq 0 \longrightarrow n=0$

ou $n=1$

<u>reciproque</u>: <u>pour $n=0$</u> a divise a

<u>pour $n=1$</u> $4+a$ divise $4+a$

Cond : $n=0$ ou $n=1$.