Rotations du plan

Cours élaboré par le prof: Chouihi

I. Définition

Activité N°1

1) Etant donnés deux points distincts O et A du plan, construire, s'il existe, un point A' tel que :

$$\begin{cases} OA' = OA \\ (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

. Le point A' est il unique ?

2) Etant donnés un point O du plan et un réel α,
Montrer que pour tout point M distinct de O, il existe un point M' unique tel que : $\begin{cases} OM' = OM \\ (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

Que peut on dire de M' pour $\theta = 2k\pi$ puis pour $\theta = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ?

Définition

Soient O un point du plan et θ un réel donné.

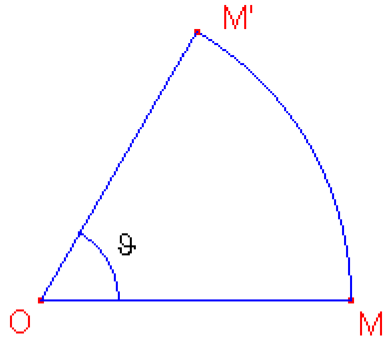
L'application du plan P dans lui même qui à tout point M associe le point M' défini comme suit :

- Si M = O alors M' = O
- Si M ≠ O alors M' vérifie $\begin{cases} OM' = OM \\ (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$

est appelée rotation de centre O et d'angle θ, on la note : **$r_{(O,\theta)}$.**

On a ainsi pour tout M ≠ O,

$$M' = r_{(O,\theta)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$$



Cas particulier

Etudier les cas:

$$\alpha = 2k\pi \text{ et } \alpha = \pi + 2k\pi$$

Vocabulaire

On suppose que $\alpha \in]-\pi,\pi]$

- **Si $\alpha \geq 0$ alors la rotation r est dite directe**
- **Si $\alpha < 0$ alors la rotation r est dite indirecte**

Exercice N°1

On considère un carré ABCD de sens direct et de centre O.
Déterminer les images des points A, B, C et D par :

- **La rotation de centre O et d'angle** $\frac{\pi}{2}$
- **La rotation de centre O et d'angle** $-\frac{\pi}{2}$

Exercice N°2

.

Construire le centre O d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et transformant un point A en un point A' (A'≠A)

Activité N°2 page 72

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit A et A' deux points distincts et θ un réel différent de $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1. a. On suppose que $\theta \equiv \pi[2\pi]$.

   Monter qu'il existe un unique point O tel que $OA = OA'$ et $\widehat{(\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OA'})} \equiv \pi\left[2\pi\right]$.

   b. Reprendre la question pour θ différent de $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. En déduire qu'il existe une rotation unique d'angle θ qui transforme A en A'.

3. Donner un procédé de construction du centre de cette rotation, lorsque θ est un réel différent de $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Théorème

Une rotation r est bien déterminée par la donné de son angle , d'un point et de son image par r

Activité N°4 page 73

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABCD un losange de centre I tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

1. Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui transforme D en B. Quel est son centre ?
2. Soit R_1 la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme A en D et soit I' son centre.
   a. Vérifier que I', I, A et D sont sur un même cercle.
   b. Construire le point I'.
3. Soit R_2 la rotation d'angle $\frac{\pi}{8}$ qui transforme C en B. Construire son centre J.

II. Propriétés

Soir r la rotation de centre O et d'angle α.

1) **On sait que r(O) = O ; on suppose qu'il existe un point $M \neq O$ invariant par r.**

   a) **Evaluer** $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$.

   b) **En déduire la propriété suivante :**

(P_1)

Toute rotation d'angle non nul admet son centre comme unique point invariant.

2) Soit M un point distinct de O.

$$r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{OM'}) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM'} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{OM}) \equiv -\theta\,[2\pi] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ **r'(M') = M ;**

où r' est la rotation de même centre O et d'angle -θ.

(P_2)

Toute rotation est une bijection du plan dans lui même dont la réciproque est une rotation de même centre et d'angle opposé.

On écrit: $r^{-1}_{(O,\theta)} = r_{(O,-\theta)}$

Soit A , B et C trois points du plan d'images respectives A', B' et C' par r. On se propose de démontrer l'égalité: $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

1) On suppose que A et B sont distincts de O.

a) Montrer que $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})[2\pi]$

b) En déduire l'égalité $\overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

c) Que peut on dire si A ou B se confond avec O?

2) En exprimant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$

montrer que $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

3) Déduire que A'B' = AB

(P_3)

Toute rotation conserve les distances

<u>c-à-d:</u> pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par une rotation on a: $M'N' = MN$

(P_4)

Toute rotation conserve le produit scalaire

c.-à-d.: pour tous points A, B et C d'images respectives A', B' et C' par une rotation on a: $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Commentaire

On appelle isométrie , toute application du plan P dans P qui conserve les distances.

Autrement dit:

Soit f une application de P dans P.

f est une isométrie de P si et seulement si pour tous points M et N de P d'images respectives M' et N' par f on a: $M'N' = MN$

Application

f	Isométrie	N'est pas une isométrie
Translation		
Homothétie		
Rotation		
Symétrie axiale		
Symétrie centrale		
Projection		

Activité

Soit r une rotation de centre O et d'angle θ.

A, B, C et D des points d'images respectives A', B', C' et D' par r.

1) **Montrer que** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta [2\pi]$

2) **En déduire l'égalité:** $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) [2\pi]$

Théorème

- **Si A' et B' sont les images respectives de A et B par une rotation d'angle θ alors** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta [2\pi]$

- **Si A', B',C' et D' sont les images respectives de A, B, C et D par une rotation d'angle θ alors**

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) [2\pi]$$

Propriété

Soit r une rotation du plan . On désigne par A, B, C et D des points du plan d'images respectives A', B', C' et D' par r et par x un réel.

$$\textbf{Si } \overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{AB} \textbf{ alors } \overrightarrow{C'D'} = x\overrightarrow{A'B'}$$

Prouver ce résultat.

Conséquences

A justifier et à retenir :

- **Toute rotation conserve le milieu.**
- **Toute rotation conserve le barycentre de deux points pondérés.**
- **Toute rotation conserve l'alignement**
- **Toute rotation conserve l'équipollence.**

  i.e : si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{A'B'}$
- **L'image d'une droite par une rotation est une droite**
- **L'image d'un segment par une rotation est un segment qui lui est isométrique**

Exercice N°6 page 86

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABC un triangle équilatéral de centre I tel que

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC})} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi].$$

Soit M un point du côté [AB], distinct de A et B. On considère les points N et P appartenant respectivement à [BC] et [AC] tels que AM = BN = PC.

Montrer que le triangle MNP est équilatéral de centre I.

Propriété

Toute rotation conserve le parallélisme et l’orthogonalité

Prouver cette propriété

Activité

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit A et I deux points distincts , $\mathscr{C}$ le cercle de centre I passant par A et D la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

Soit O un point, θ un réel et R la rotation de centre O et d’angle θ.

1. Montrer que l’image du cercle $\mathscr{C}$ par R est un cercle.

2. On note A', $\mathscr{C}$ ' et D' les images respectives de A, $\mathscr{C}$ et D par R.

Montrer que D' est la tangente à $\mathscr{C}$' en A'.

Propriété

- **L’image d’un cercle par une rotation est un cercle qui lui est isométrique.**

- **Toute rotation conserve le contact.**

Activité N°1 page 78

Le plan est orienté dans le sens direct.

On considère un carré ABCD tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et

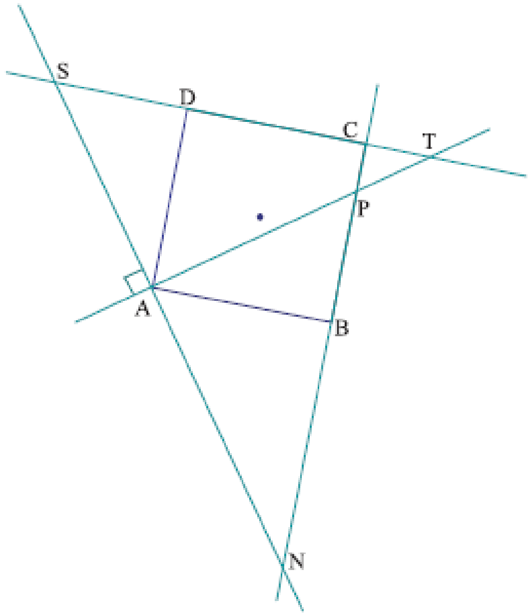
P un point du segment [BC] distinct de B.

Les droites (AP) et (CD) se coupent en T.

La perpendiculaire à (AP) passant par A coupe la droite (BC) en N et la droite (CD) en S.

Soit R la rotation de centre A et d' angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer l'image de la droite (BC) par R.
2. En déduire les images de P et de N.
3. Quelle est la nature de chacun des triangles NAT et PAS ?



Activité

Le plan est orienté dans le sens direct.

On considère quatre points A, B, C et D tels que les points A et B sont distincts et AB = CD.

1. On suppose dans cette question que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

a. Déterminer la translation qui transforme A en C et B en D.

b. Existe-t-il une rotation qui transforme A en C et B en D ?

2. On suppose dans cette question que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$

et on pose $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \theta [2\pi]$

a. Soit R la rotation d'angle θ qui transforme A en C.

Montrer que D est l'image de B par R.

b. Existe-t-il une autre rotation qui transforme A en C et B en D ?

Théorème

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit A, B, C et D quatre points tels que les points A et B sont distincts, AB = CD et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$

Il existe une rotation et une seule qui transforme A en C et B en D, d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ et de centre appartenant aux médiatrices des segments [AC] et [BD].

Application

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit A(2, 1), B(3, 3), C(1, 0) et D(–1, 1).

1. Démontrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme A en C et B en D.

2. Déterminer son angle.

3. Donner les coordonnées de son centre.

Composée de deux rotations de même centre

Soient O un point du plan, θ et θ' deux réels donnés.

On pose $R_1 = r_{(O,\theta)}$, $R_2 = r_{(O,\theta')}$

a) Préciser $R_2(R_1(O))$.

b) Soit M un point distinct de O.

On pose $M_1 = R_1(M)$ et $M' = R_2(M_1)$.

Montrer que M' est l'image de M par une rotation que l'on caractérisera.

L'application ainsi définie est appelée composée de R_1 par R_2

On la note R_2oR_1, ainsi pour tout M du plan, $R_2oR_1(M) = R_2(R_1(M))$

Théorème

La composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre et d'angle la somme des angles.

Autrement dit : $r_{(O,\theta')} \circ r_{(O,\theta)} = r_{(O,\theta+\theta')}$

Si $\theta' + \theta = 2k\pi$, $k \in Z$ alors $r' o r = id_P$