Dérivabilité

Cours élaboré par le prof: Chouihi

I. Nombre dérivé

1. Activité

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

a) Représenter graphiquement f.

b) Soit A et B les points de la courbe C_f d'abscisses respectives 1 et 3.

Donner l'équation réduite de la droite (AB).

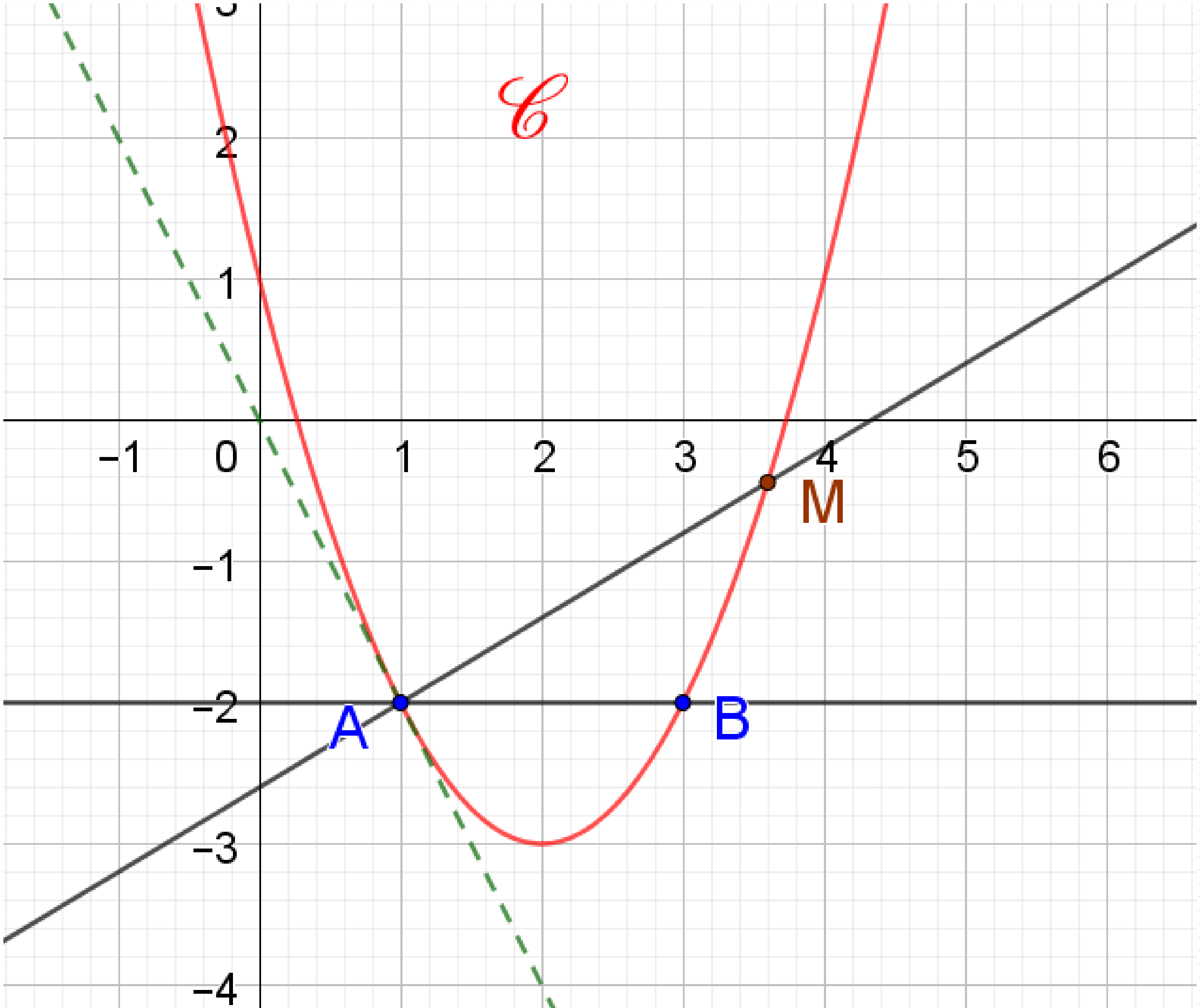
c) Soit x un réel différent de 1 et M le point de C_f d'abscisse x.

On désigne par $\varphi(x)$ le coefficient directeur de la droite (AM).

- Exprimer $\varphi(x)$ en fonction de x puis calculer sa limite quand x tend vers 1.
- Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point A.

fig

1. Activité



2. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
f est dite dérivable en x_0 si et seulement si l'expression

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0

Dans ce cas:
on note $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Le réel $f'(x_0)$ est appelé nombre dérivé de f au point x_0.

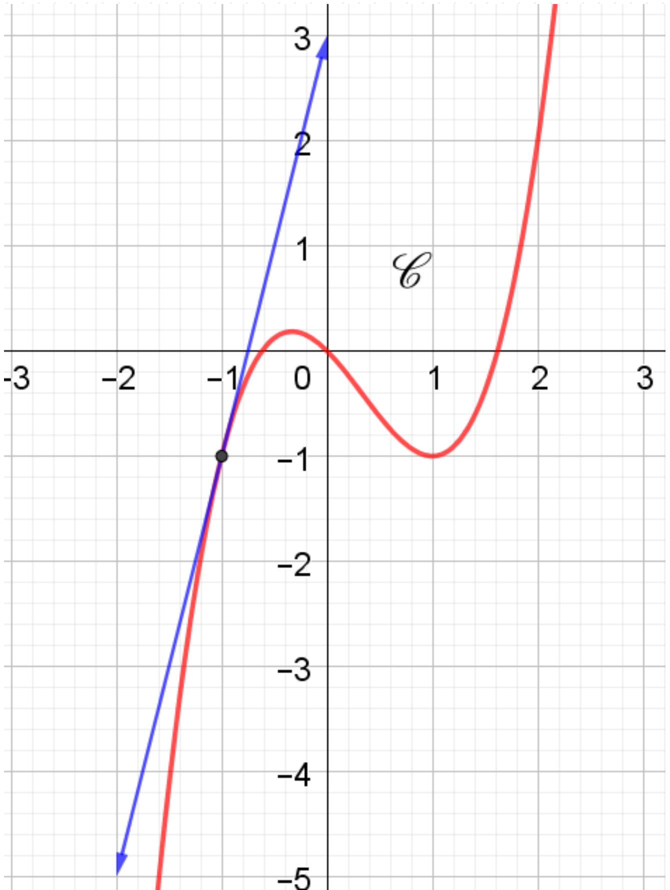
Interprétation géométrique :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Si f est dérivable en x_0 alors la courbe C_f admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente $\mathcal{T}_0$ d'équation :

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$\mathcal{T}_0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$



Exemple: On pose $f(x) = x^3 - 2x^2 - x$

Montrer que f est dérivable en (-1) et déterminer f'(-1),

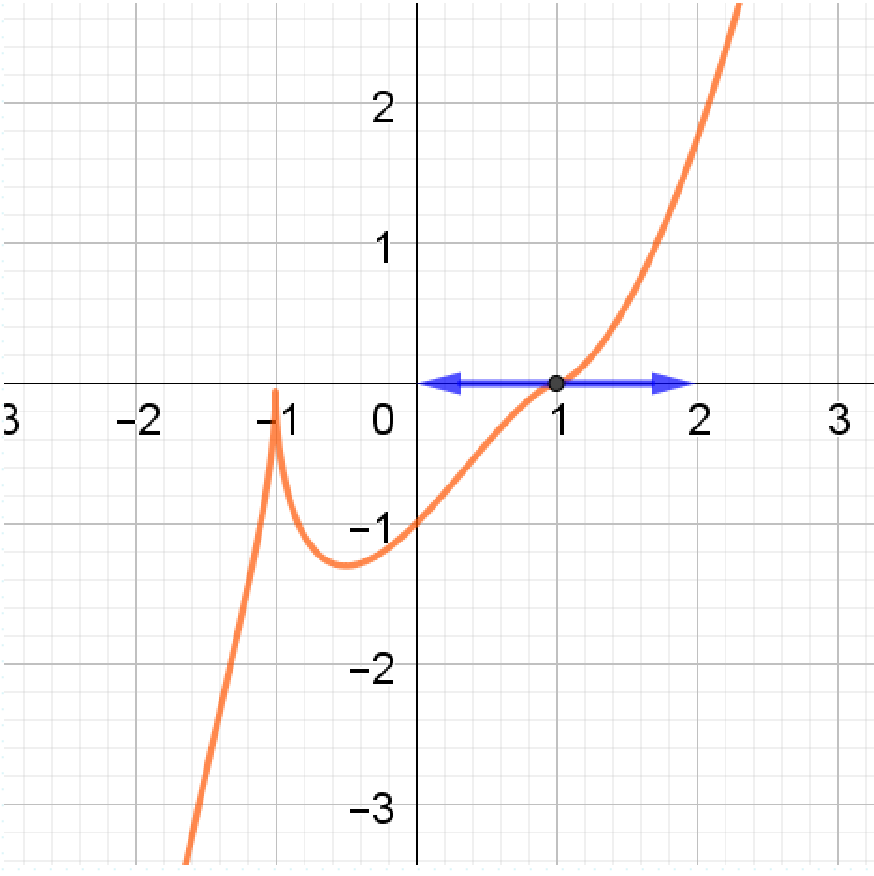
Interpréter graphiquement

Application N°1

$$f(x) = (x-1)\sqrt{|x^2-1|}$$

a) Etudier la dérivabilité de f en 1

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.



Application N°2

On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$

1) **Montrer que f est dérivable en 2 et préciser $f'(2)$.**
2) **Montrer que f est dérivable en tout réel t et exprimer, en fonction de t, $f'(t)$.**
3) **En déduire le signe de $f'(t)$.**

Retenons: **La fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est dérivable en tout réel x et pour tout $x \in IR$,**

$$f'(x) = 2ax + b$$

3. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0,b[$.
f est dite dérivable à droite en x_0 si et seulement si l'expression $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0^+

Dans ce cas:

on note $f_d'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Le réel $f_d'(x_0)$ est appelé nombre dérivé de f à droite au point x_0.

4. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]b, x_0]$.

f est dite dérivable à gauche en x_0 si et seulement si l'expression $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0^-

Dans ce cas:

on note $f_g'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

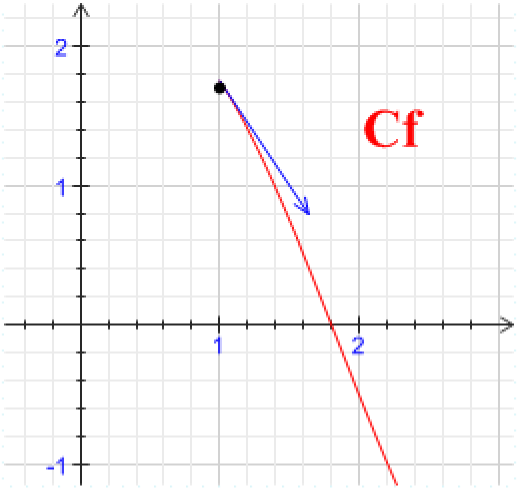
Le réel $f_g'(x_0)$ est appelé nombre dérivé de f à gauche au point x_0.

Interprétation géométrique :

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

➢ Si f est dérivable à droite en x_0 alors la courbe C_f admet au point $M_0(x_0,f(x_0))$ une demi tangente $\mathcal{T}_0$ d'équation :

$$\begin{cases} y = f_d'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$



$\mathcal{T}_0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f_d'(x_0) \end{pmatrix}$

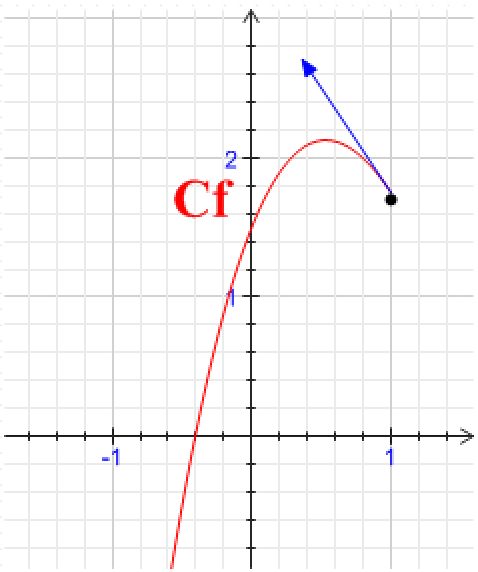
Interprétation géométrique :

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

➢ Si f est dérivable à gauche en x_0 alors la courbe C_f admet au point $M_0(x_0,f(x_0))$ une demi tangente $\mathcal{T}_0$ d'équation :

$$\begin{cases} y = f_g'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$

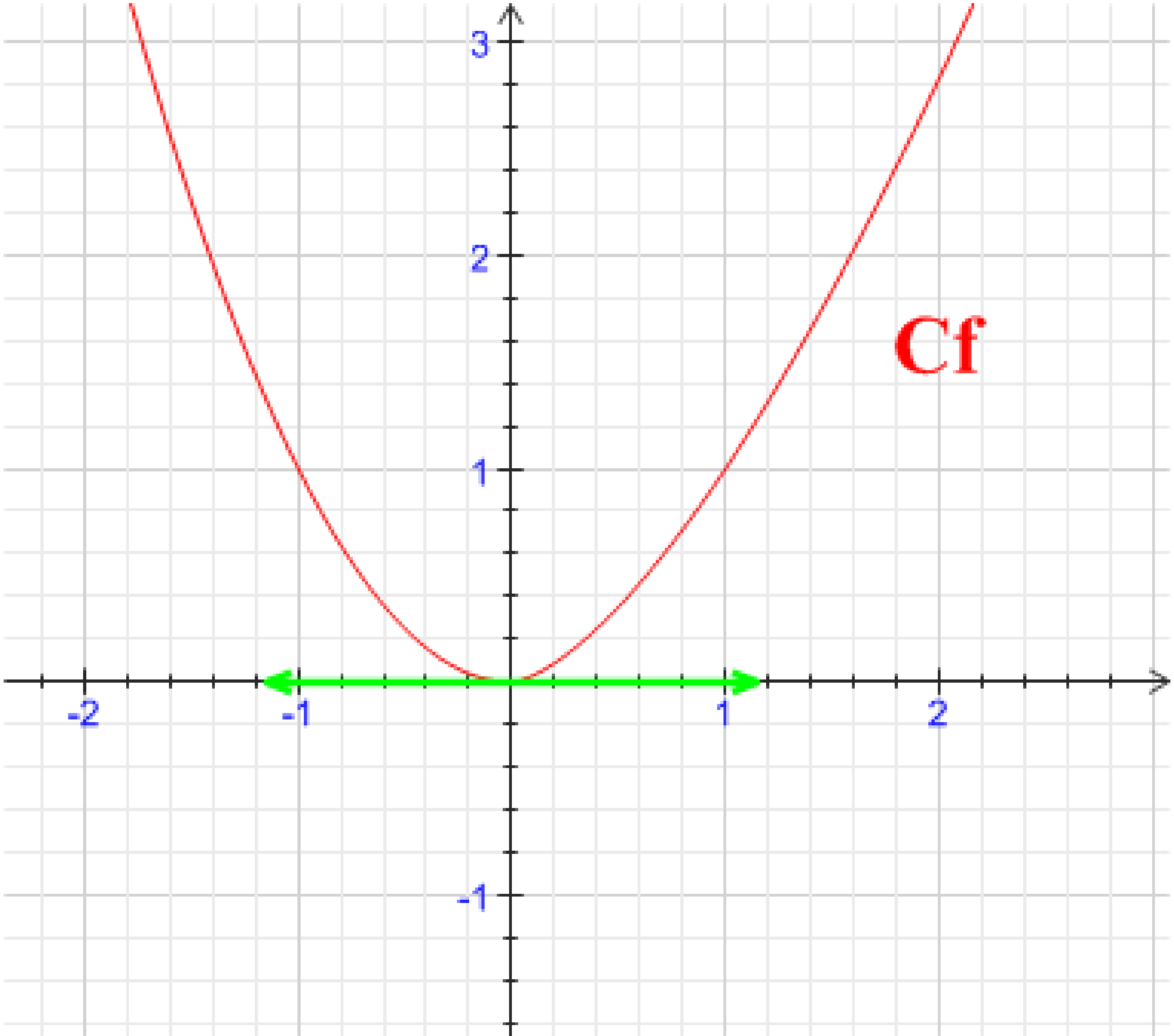
$\mathcal{T}_0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f_g'(x_0) \end{pmatrix}$



Application N°3

Soit f la fonction définie par: $f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ si } x \leq 0 \\ x\sqrt{x} \text{ si } x \succ 0 \end{cases}$

a) Préciser Df
b) Etudier la continuité de f en 0
c) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0.
d) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
e) Que peut on conclure pour la dérivabilité de f en 0? Interpréter graphiquement.


3
2
1
-1
-2
-1
1
2
Cf

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_o \in$ I.

f est dérivable en x_o

si et seulement si

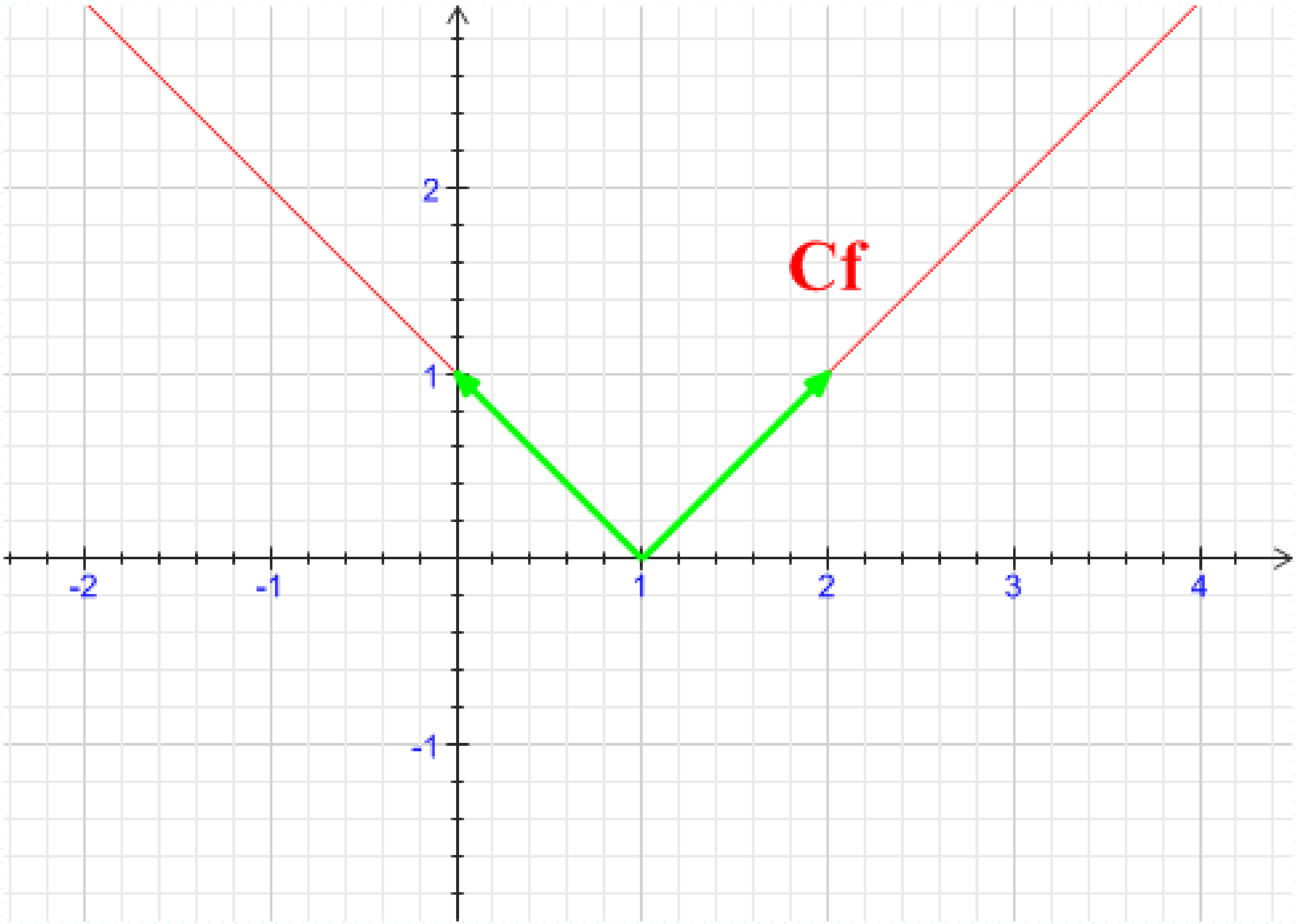
$$\begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en } x_0 \\ f \text{ est dérivable à droite en } x_0 \\ f'_g(x_0) = f'_d(x_0) \end{cases}$$

Application N°4

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x - 1|$.

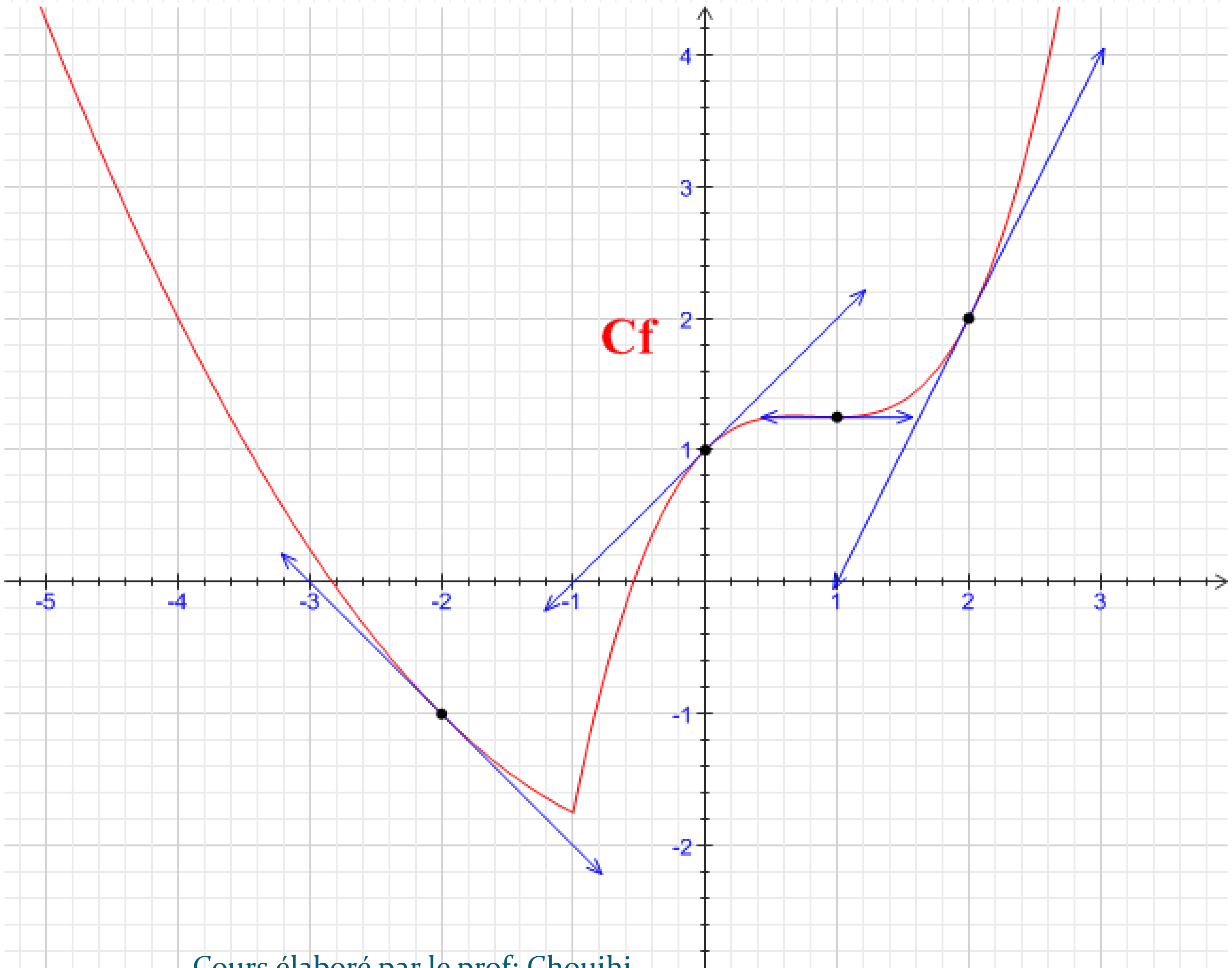
a) Etudier la dérivabilité de f en 1.

b) Interpréter graphiquement.


Cf
2
1
-1
-2
-1
1
2
3
4

Application N°5

Par lecture graphique, déterminer f’(-2) , f’(0) , f’(1) et f’(2)



Activité 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

On suppose que f est dérivable en x_0.

On pose $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$
2. Vérifier que $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)g(x)$

   En déduire que f est continue en x_0.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0

Exercice

On considère la fonction f définie sur IR par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } x\in\left]-\infty,0\right] \\ x\sqrt{x}-1 & \text{si } x\in\left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1/ Montrer que f est continue en 0

2/ f est elle dérivable en 0 ?

3/ Déterminer une équation cartésienne de la tangente à C au point d'abscisse 1

4/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-1]$. Interpréter graphiquement

5. Approximation affine

Définition

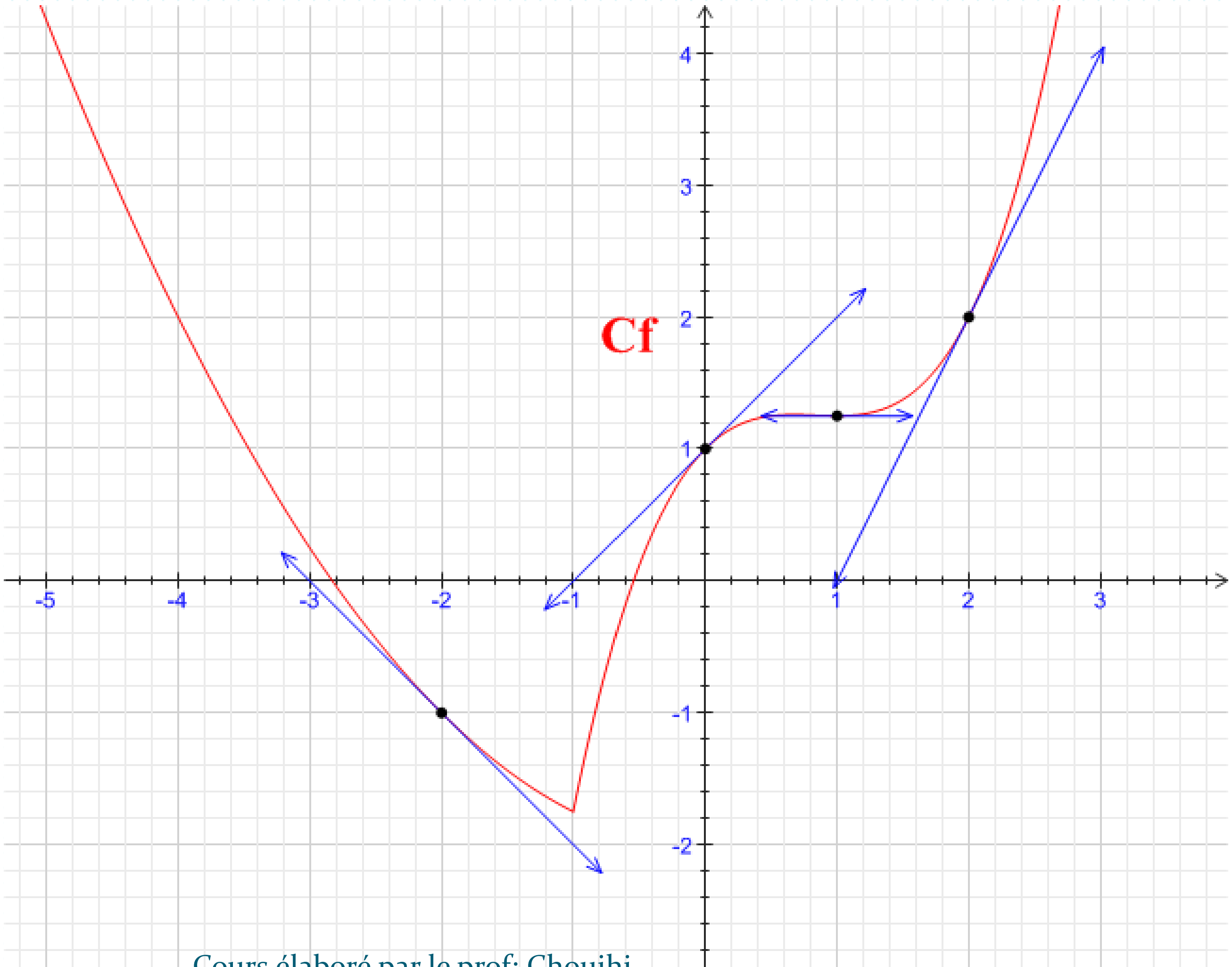
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

Si f est dérivable en x_0 alors le réel $f(x_0) + hf'(x_0)$ est une approximation affine de $f(x_0+h)$ pour h voisin de zéro.

On écrit $f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)$

Application N°6

Donner une approximation affine de f(-2,001) , f(0,0001) et f(1,999)



6. Dérivabilité sur un intervalle

Définition

•Soit I un intervalle de la forme $]a,b[$ ou $]-\infty,b[$ ou $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$

Une fonction f est dite dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$.

•Soit I un intervalle de la forme $[a, b[$ (b fini ou infini)

Une fonction f est dite dérivable sur I si et seulement si f est dérivable sur $]a,b[$ et elle est dérivable à droite en a.

- Soit I un intervalle de la forme]a, b] (a fini ou infini)

Une fonction f est dite dérivable sur I si et seulement si f est dérivable sur]a,b[et elle est dérivable à gauche en b.

- Soit I un intervalle de la forme [a, b].

Une fonction f est dite dérivable sur I si et seulement si f est dérivable sur]a,b[, elle est dérivable à droite en a et à gauche en b.

Exercice

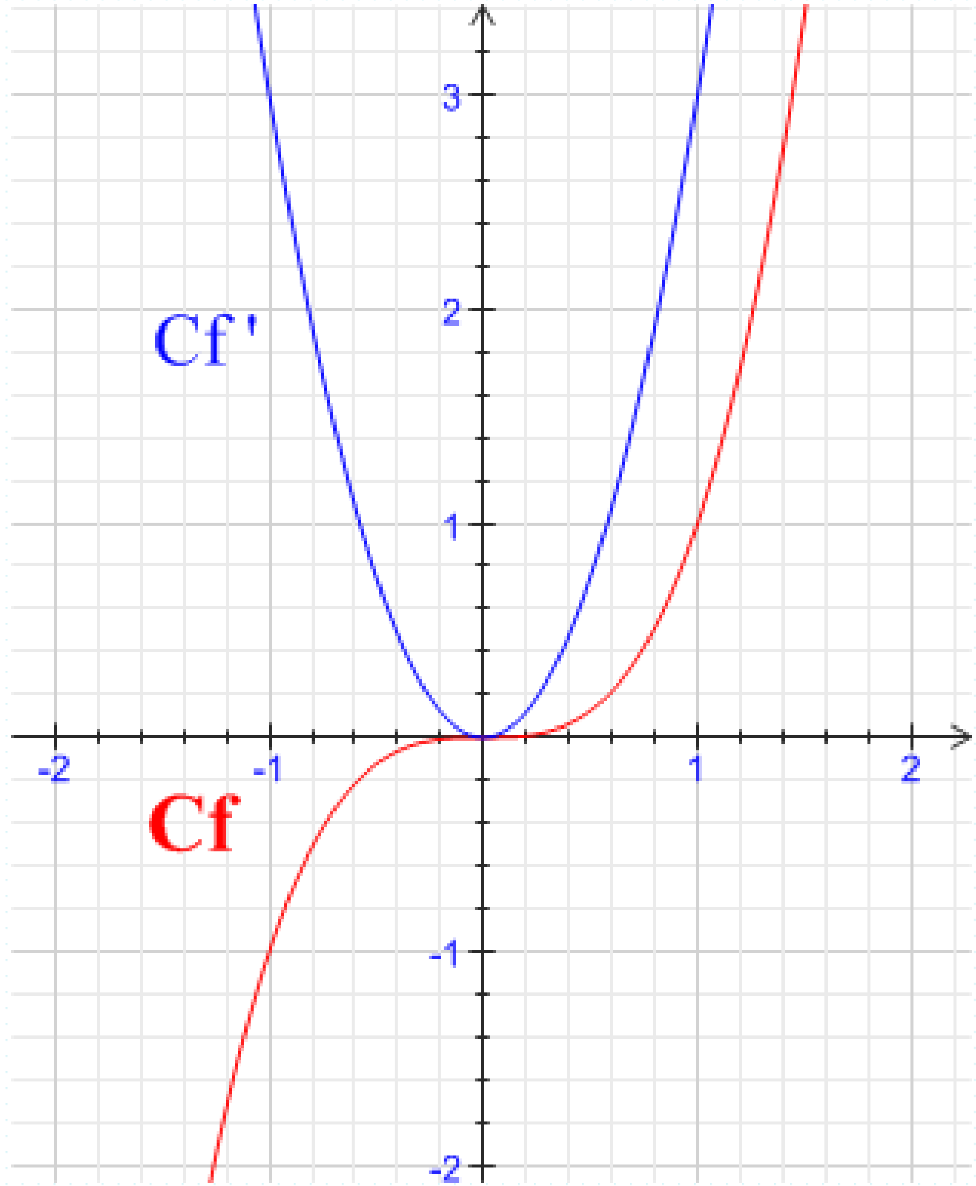
On pose $f(x) = x^3$

Montrer que f est dérivable sur IR et

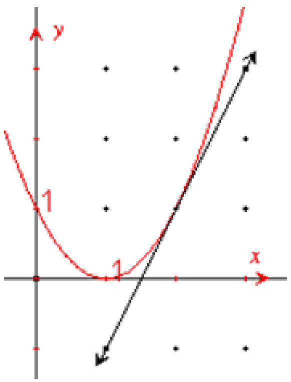
déterminer $f'(x)$ pour $x \in IR$

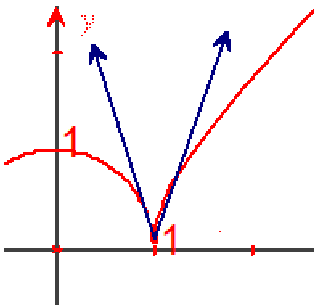
- Par lecture graphique, déterminer f(-1) ; f'(-1) , f(0) , f'(0) , f(1) et f'(1) .

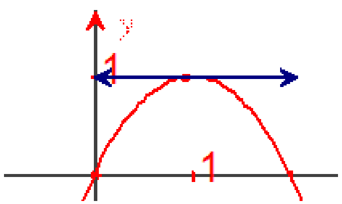
- Sachant que $f(x) = x^3$, vérifier les résultats précédents par le calcul.

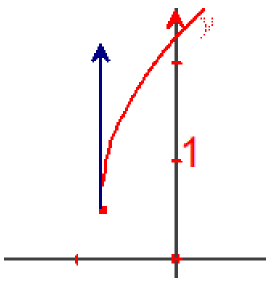


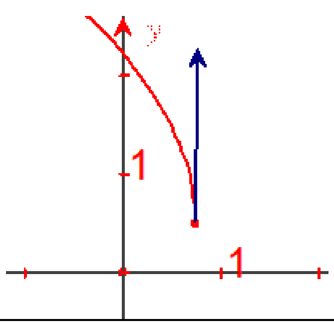
Interprétation géométrique

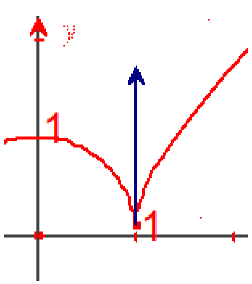




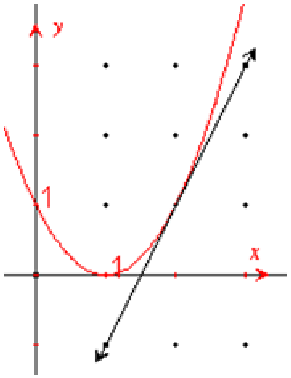


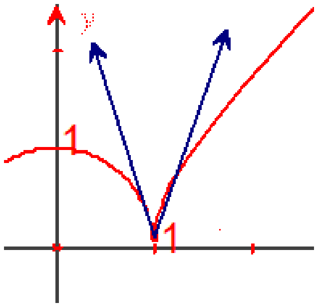


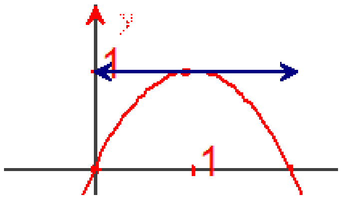


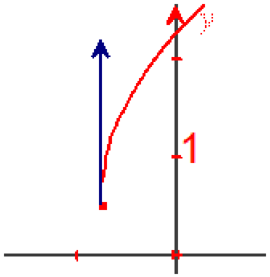


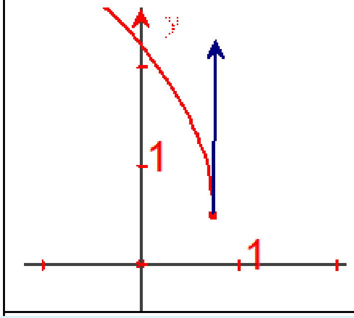
Interprétation géométrique

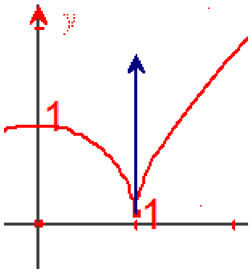




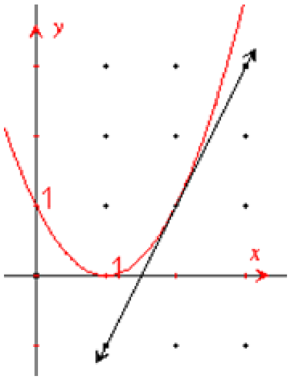


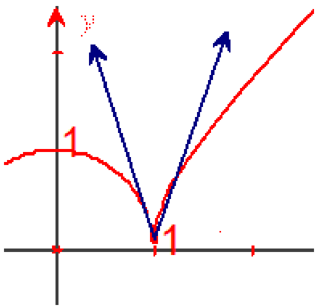


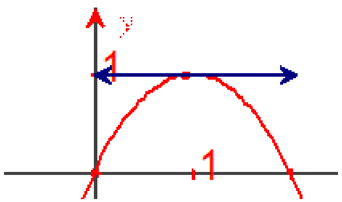


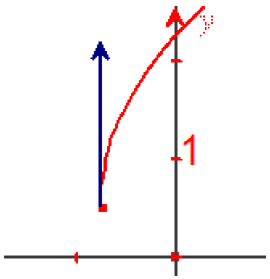


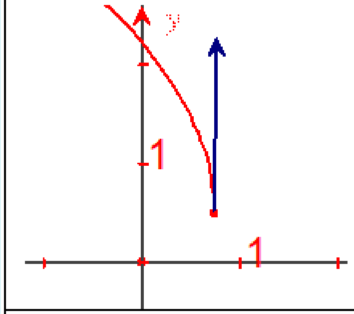
Interprétation géométrique

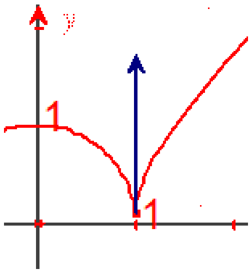




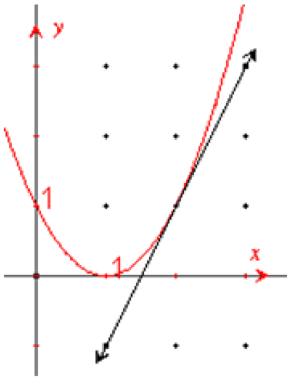
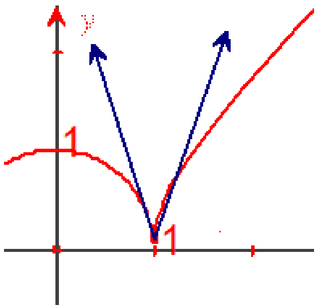
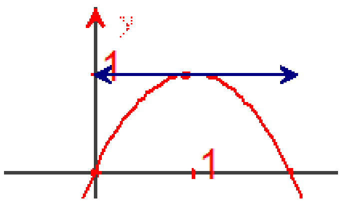
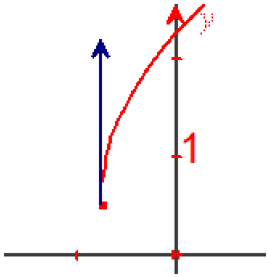
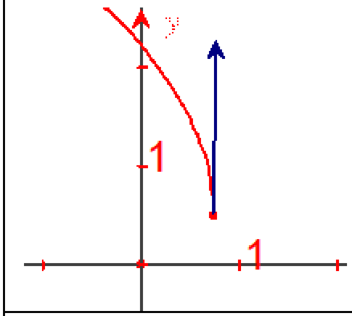
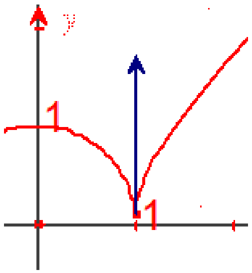




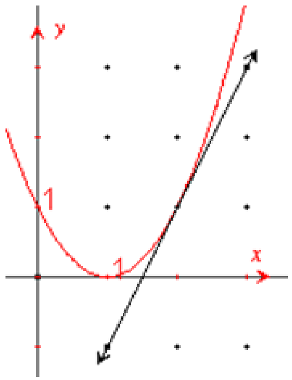


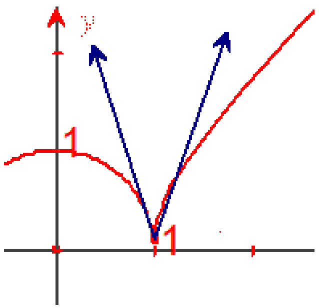


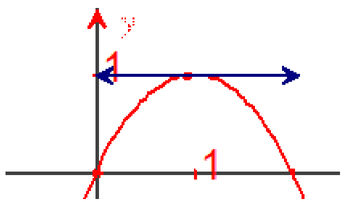
Interprétation géométrique

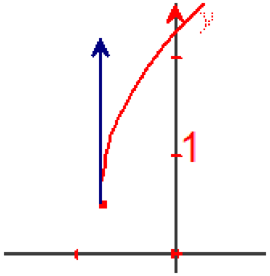
	
	
	

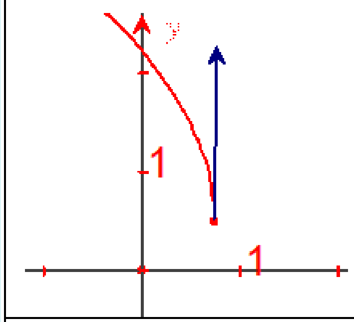
Interprétation géométrique

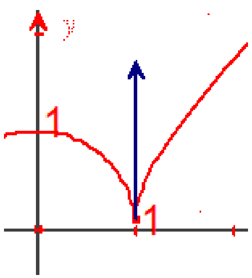




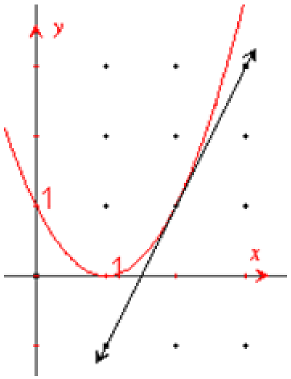


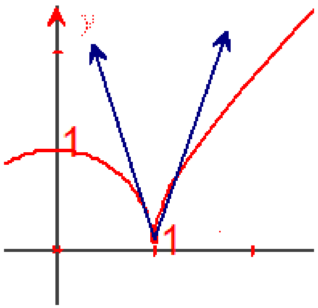


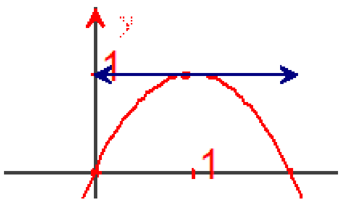


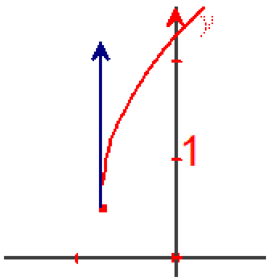


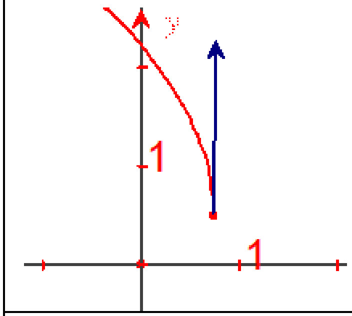
Interprétation géométrique

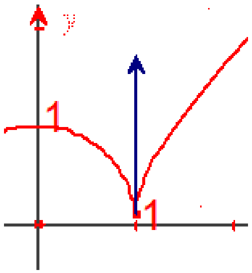




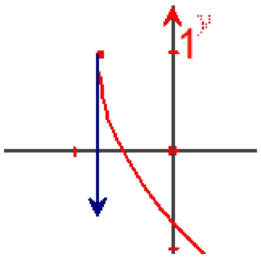
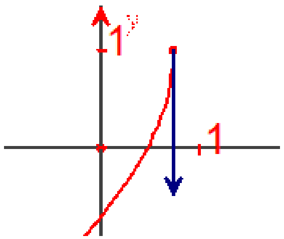
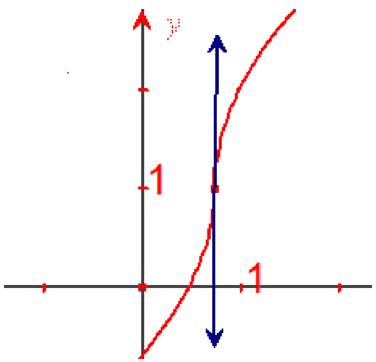
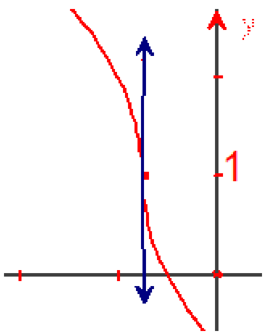
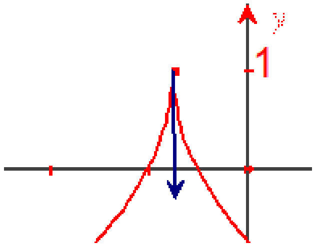
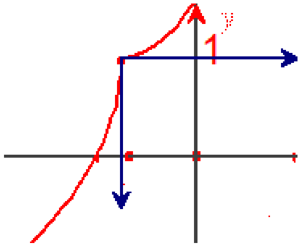




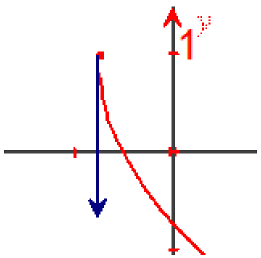
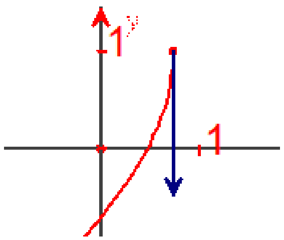
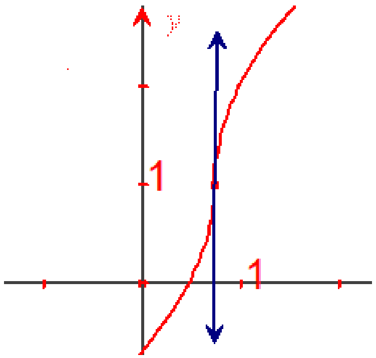
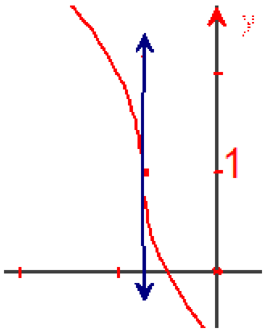
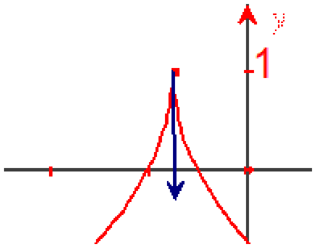
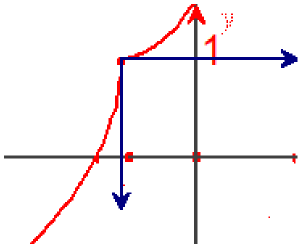




Interprétation géométrique

Interprétation géométrique

II. Fonction dérivée

1. Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. On appelle fonction dérivée de f et on note f', la fonction qui à tout $x \in I$, associe le nombre dérivé $f'(x)$.

On a ainsi:

$$f' : I \to IR$$
$$x \to f'(x)$$

Activité

Soit x un réel et $n \in IN^*$, on pose $S_n(x) = 1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}$

a) Calculer, en fonction de x, $(1 - x)\, S_n(x)$.

b) En déduire que pour tout réel x et tout entier naturel n, on a: $1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})$

c) En posant $x = b/a$, établir l'égalité (à retenir)

Pour tous a et b réels et pour tout $n \in IN^*$ on a:

$$\boxed{a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

2. Fonctions dérivées usuelles

Dans le tableau suivant f est une fonction, f' sa fonction dérivée ,Df est l'ensemble de définition de f et I un intervalle sur lequel f est dérivable.

Recopier le tableau puis le compléter en justifiant.

f(x)	Df	I	f'(x)
a , $a \in IR$			
$ax + b$			
ax^2+bx+c			
$\dfrac{1}{x}$			
$\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$			
$\sqrt{x}$			
x^n , $n \in IN^*$			

f(x)	Df	I	f'(x)
a , a∈IR	IR	IR	0
ax + b	IR	IR	a
ax^2+bx +c	IR	IR	2ax+b
$\frac{1}{x}$	IR*	]-∞,0[ou]0,+∞[	$\frac{-1}{x^2}$
$\frac{ax+b}{cx+d}$ c≠0 et ad-bc≠ 0	IR\\{$\frac{-d}{c}$}	]-∞, $\frac{-d}{c}$[ou] $\frac{-d}{c}$,+∞[	
$\sqrt{x}$	[0,+∞[	]0,+∞[	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^n , n∈IN*	IR	IR	nx^{n-1}

3. Opérations sur les fonctions dérivées

<u>Théorème1</u>

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors les fonctions: $u + v$, $\alpha u + \beta v$ (α et β réels), uv et u^n ($n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$) sont dérivables sur I et on a:

$(u+v)' = u' + v'$ $\quad\quad$ $(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v'$

$(uv)' = u'v + uv'$ $\quad\quad$ $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

Application

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes:

$$1)\ f(x) = 5x^2 - 4x + 12 + 8\sqrt{x}$$

$$2)\ f(x) = \frac{3x+8}{2x-1} + 5x^4$$

$$3)\ f(x) = (2x^2 + 3x - 5)(-7x^2 + x + 2)$$

$$4)\ f(x) = (x^2 + 4x + 3)^5$$

Théorème2

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et tel que pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$.

Alors les fonctions: $\frac{1}{v}$, $\frac{u}{v}$ et v^n $(n \in \mathbb{Z}_-^*)$ sont dérivables sur I et on a:

$$\boxed{(\frac{1}{v})' = \frac{-v'}{v^2} \qquad (\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (v^n)' = nv'v^{n-1}}$$

Conséquences

- **Toute fonction polynôme est dérivable sur IR**

- **Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle contenu dans son domaine de définition**

Application N°7

Déterminer la fonction f ' dans chacun des cas suivants :

1°) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - 3x + 1$.

2°) $f(x) = (5x - 2)^4$.

3°) $f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{3x^2 + x + 1}$.

4°) $f(x) = \frac{-2}{(x^2 + 3)^3}$.

5°) $f(x) = \frac{-4x + 5}{(-2x + 3)^2}$.

Théorème3

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et on a:

$$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

Démontrer ce théorème

Application N°8

Déterminer la fonction dérivée f' :

$$1)\ f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$2)\ f(x) = \sqrt{\frac{2x - 5}{x + 3}}$$

Application N°9

Déterminer dans chaque cas la fonction dérivée de la fonction f indiquée tout en précisant le domaine de dérivabilité de f.

$f(x) = -3x^4 + 2x^3 - 5$; $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$; $f(x) = \dfrac{-x^2+3x-1}{x+1}$; $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x^2+1}$

$f(x) = -3\sqrt{-2x+3}$; $f(x) = \dfrac{-3}{x^2-4}$; $f(x) = \dfrac{4}{(-x^2+1)^3}$; $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

$f(x) = \sqrt{-2x^2+3x-1}$; $f(x) = (-3x^2+2x)^4$; $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1}}$; $f(x) = \sqrt{3x+1}$

$f(x) = 2(x^3+2x)^3$; $f(x) = (x^2-x)\sqrt{-x^2+9}$; $f(x) = (x^2+x)^3(-x^2+1)^4$

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle J et I un intervalle de IR tel que pour tout $x \in I$, $\alpha x + \beta \in J$.

La fonction $g: x \rightarrow f(\alpha x + \beta)$ est dérivable sur I et on a:

Pour tout $x \in I$, $g'(x) = \alpha . f'(\alpha x + \beta)$

III. Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$

On pose $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ pour $x \in I \setminus \{x_0\}$.

a) On suppose que f est croissante et dérivable sur I.

f est croissante sur I alors $x - x_0$ et $f(x) - f(x_0)$ sont de même signe donc $\varphi(x) \geq 0$, pour tout $x \in I$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \geq 0$

alors $f'(x_0) \geq 0$.

b) On suppose que f est décroissante et dérivable sur I.

f est décroissante sur I alors $x - x_0$ et $f(x) - f(x_0)$ sont de signes contraires donc $\varphi(x) \leq 0$, pour tout $x \in I$ alors

$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \leq 0$ alors $f'(x_0) \leq 0$.

c) On suppose que f est constante et dérivable sur I.

f est constante sur I alors pour tout $x \in I$, $f(x) = f(x_0)$ donc $\varphi(x) = 0$, pour tout $x \in I$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ alors $f'(x_0) = 0$.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est croissante sur I ssi pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I ssi pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$
- f est constante sur I ssi pour tout x de I , $f'(x) = 0$

Application

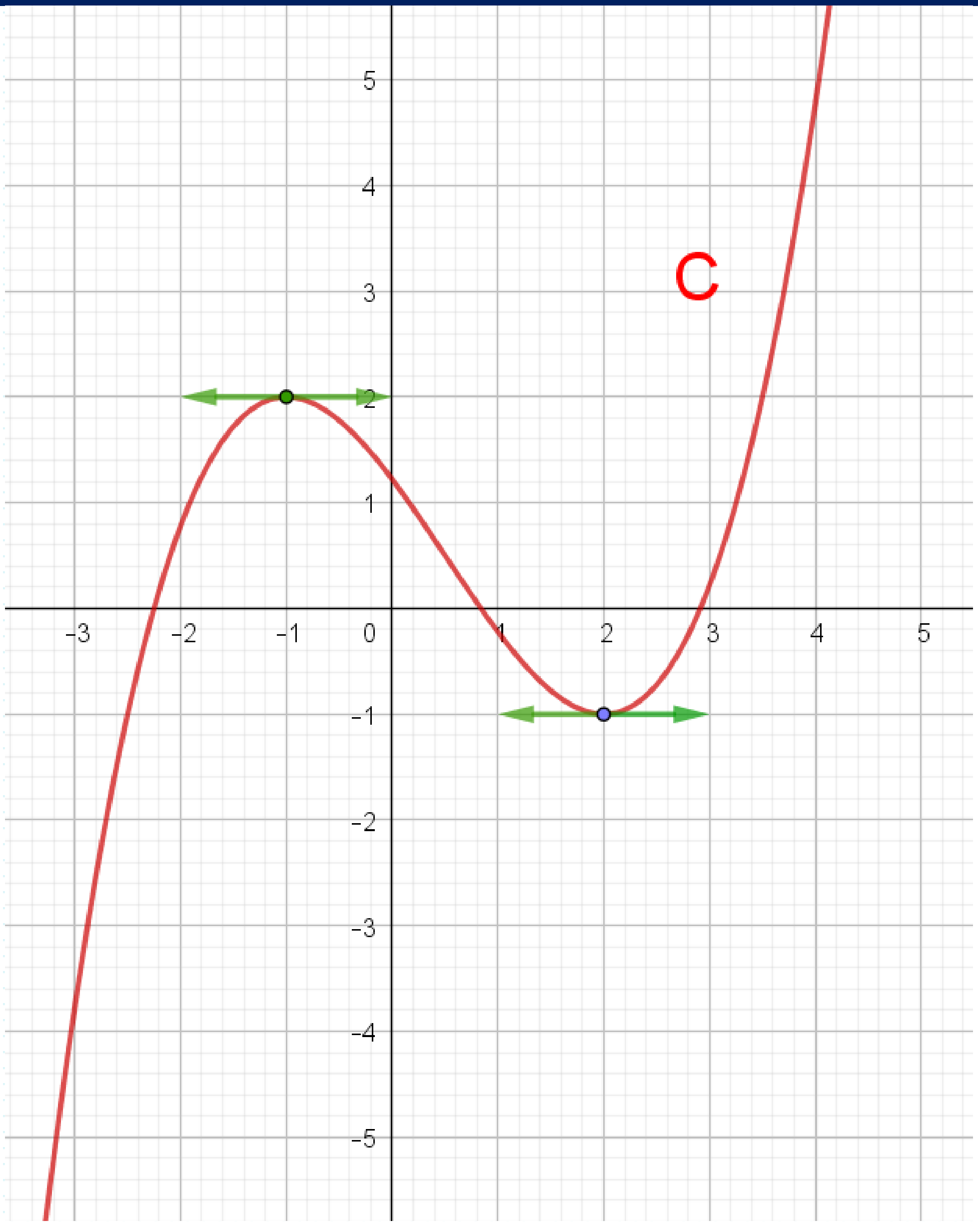
On pose $f(x) = \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{11}{9}$

1/ Dresser le tableau de variation de f.

2/ En déduire, s'ils existent, les extrémums de f.

3/ Déterminer les branches infinies de la courbe C de f.

4/ Tracer la courbe C.


C
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-3
-2
-1
1
2
3
4
5

Définition

Soit f une fonction définie sur D et $x_0 \in D$.

* $f(x_0)$ est un maximum local (ou relatif) de f ssi il existe un intervalle ouvert I de centre x_0 inclus dans D tel que:

Pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(x_0)$.

* $f(x_0)$ est un minimum local (ou relatif) de f ssi il existe un intervalle ouvert I de centre x_0 inclus dans D tel que:

Pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(x_0)$.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et

$x_0 \in I$

Si $f(x_0)$ est un extrémum local de f alors $f'(x_0) = 0$.

NB: La réciproque est fausse!

Contre exemple: $f(x) = x^3$

$f'(0) = 0$ mais f ne présente pas d'extrémum en 0.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et

$x_0 \in I$

Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors $f(x_0)$ est un

extrémum local de f.

Exercice N°6 page 113

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = ax^3 + 3x$ où a est un réel.

On suppose que la fonction f admet deux extrema locaux en 1 et -1.

1. Calculer la valeur de a.
2. Dresser le tableau de variation de f et préciser la nature de chacun des extrema de f .

Situation N°1 page 112

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit le point $M(1, 1)$ et α un réel différent de 0 et de 1.

On désigne par D_α la droite passant par M et de coefficient directeur α.

1. Vérifier que D_α a pour équation $y = \alpha x + (1 - \alpha)$.
2. On désigne par A et B, les points d'intersection de D_α respectivement avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
   a. Déterminer les coordonnées des points A et B en fonction de α.
   b. Exprimer AB^2 en fonction de α.
   c. Déterminer α pour que la distance AB soit minimale.

Situation N°2 page 112

1. Soit a un réel, on considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x - a}$.

   a. Vérifier que f est dérivable en tout réel x différent de a.

   b. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x différent de a.

   c. On note f'' la dérivée de f' ; on note $f^{(3)}$ la dérivée de f'' et pour tout entier $k \geq 2$, $f^{(k)}$ la dérivée de $f^{(k-1)}$.

   Calculer $f^{(k)}(x)$, $k \geq 2$.

2. On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

a. Vérifier que $g(x) = -1 + \dfrac{2}{1 - x}$.

b. Montrer que g est dérivable en tout réel x différent de 1 et calculer sa dérivée.

c. Calculer $g^{(k)}(x)$, $k \geq 2$.

Exercice N°11 page 114

Démontrer que pour tout x ≥ 0 on a:

$$\sqrt{1 + x^3} \leq 1 + \frac{1}{2} x^3$$

Exercice N°12 page 114

Montrer que de tous les triangles rectangles d'hypoténuse 4 cm, le triangle isocèle est celui qui a le plus grand périmètre.