Angles orientés

Cours élaboré par le prof: Chouihi

I. Arcs orientés

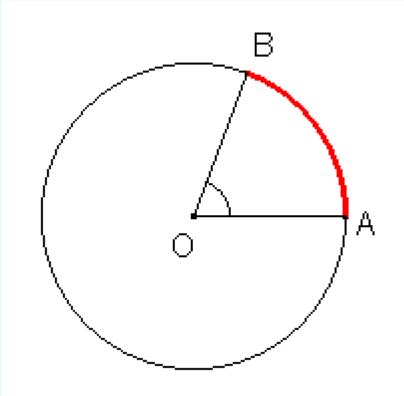
Théorème

Soit AB un arc d'un cercle de centre O et de rayon r.

Si AOB = θ rd alors la mesure de AB = r θ .

En particulier si r = 1 alors

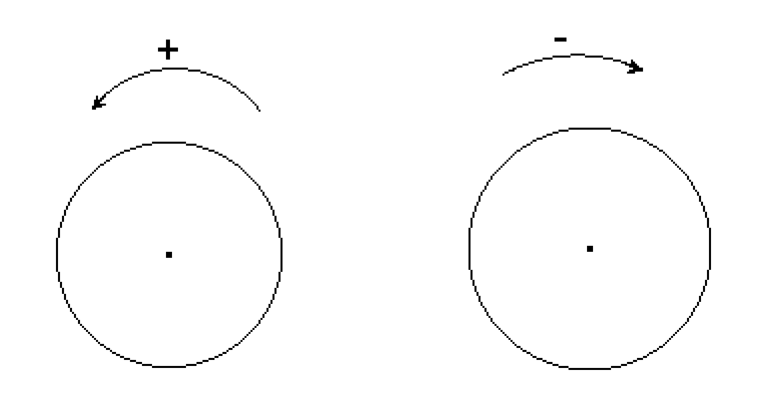
la mesure de AB = θ .



Définition

On appelle sens direct ou sens positif le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre.

l'autre sens est appelé sens négatif ou sens indirect.



Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1, orienté dans le sens direct.

Définition

Soient A et B deux points distincts d'un cercle (C).

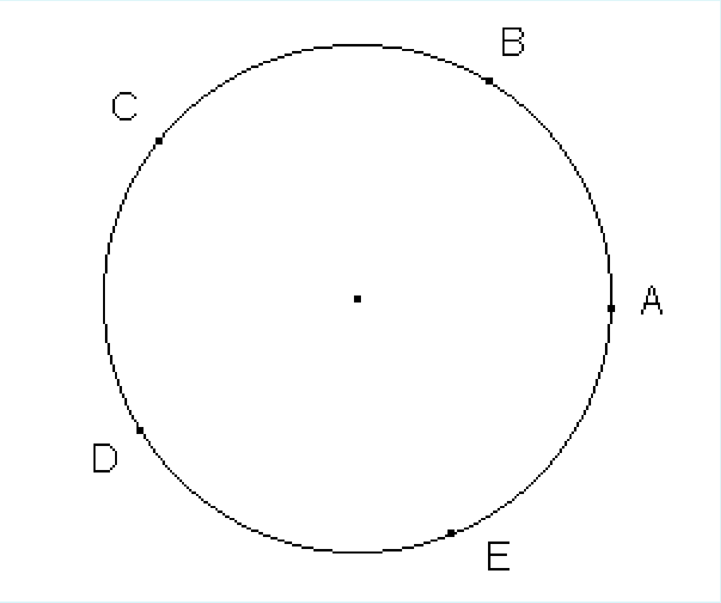
Ils existent deux arcs du cercle (C) d'extrémités A et B ; on note $\overset{\curvearrowright}{AB}$ celui qui est orienté dans le sens positif et on dit que $\overset{\curvearrowright}{AB}$ est un arc orienté d'origine A et d'extrémité B.

Par définition l'arc orienté $\overset{\curvearrowright}{AA}$ est réduit au seul point A.

Application

Compléter par $\in$ ou $\notin$

	CA	EB	AD	BE
D				
C				
B				
E				



Activité

Soit $\overset{\frown}{AB}$ un arc orienté de longueur L d’un cercle trigonométrique C

Un point M de C se déplace de A vers B en ce déplaçant dans le même sens pouvant faire un certain nombre de tours du cercle avant de s’arrêter.

On se propose de calculer la distance parcourue par M suivant le cas, cette distance étant affectée du signe – lorsque M se déplace dans le sens négatif. Compléter le tableau suivant:

Activité

	Nombre de tours	Mesure algébrique
Sens direct	0	
	1	
	2	
	5	
	k	
Sens indirect	0	
	1	
	2	
	5	
	k	

Définition

Soit $\overset{\curvearrowright}{AB}$ un arc orienté de longueur L d'un cercle trigonométrique (C).
On appelle mesure algébrique de l'arc $\overset{\curvearrowright}{AB}$ tout réel de la forme : $L + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. On écrit : mes $\overset{\curvearrowright}{AB} = L + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
Une mesure particulière : il existe une seule mesure dans l'intervalle $[\ 0\ ;\ 2\pi\ [$ qui est la longueur L de l'arc orienté.
Arc particulier : mes $\overset{\curvearrowright}{AA} = 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Théorème et définition

- Si x et y sont deux mesures d'un arc orienté $\overset{\curvearrowright}{AB}$ alors $x - y = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$;

on écrit $x \equiv y\ [2\pi]$

et on lit : « x est congru à y modulo 2π ».

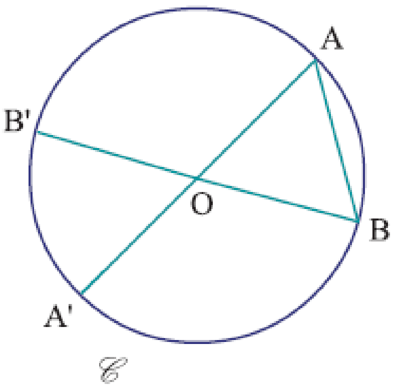
- Pour tout point M de (C) et pour tout réel x il existe un point N unique de (C) tel que :

mes $\overset{\curvearrowright}{MN} \equiv x\ [2\pi]$.

Activité N°2 page N°29

Dans la figure ci-contre, $\mathscr{C}$ est un cercle trigonométrique de centre O, OAB est un triangle équilatéral.

Les points A' et B' sont les symétriques respectifs des points A et B par rapport à O.



1. Pour chacun des arcs orientés $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AA'}$, $\overset{\frown}{AB'}$, déterminer la mesure qui appartient à $[0, 2\pi[$.
2. Soit K le point de $\mathscr{C}$ tel que mes $\overset{\frown}{AK} \equiv \dfrac{37\pi}{4}[2\pi]$.

   Ecrire la division euclidienne de 37 par 4. Donner la mesure de $\overset{\frown}{AK}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$ et placer le point K.
3. Placer le point N de $\mathscr{C}$ tel que mes $\overset{\frown}{BN} \equiv \dfrac{19\pi}{3}[2\pi]$.

Activité N°1 page N°29

Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique et (A, B) un couple de points de $\mathscr{C}$ tels que mes $\overset{\frown}{AB} \equiv \frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$.

1. Faire une figure.
2. Placer sur $\mathscr{C}$ le point D tel que mes $\overset{\frown}{BD} \equiv \frac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$ et le point D' tel que mes $\overset{\frown}{AD'} \equiv \frac{\pi}{6}\left[2\pi\right]$.
3. En désigne par $L_1, L_2, L_3,\ L_4$ et L_5 les mesures repectives qui appartiennent à $[0, 2\pi[$ des arcs $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BD}, \overset{\frown}{AD}, \overset{\frown}{BD'}$ et $\overset{\frown}{AD'}$.

   a. Comparer $L_1 + L_2$ et L_3.

   b. Comparer $L_1 + L_4$ et L_5.

Propriétés

Pour tous points A, B et C d'un cercle orienté $\mathscr{C}$ de rayon 1, on a

$\text{mes}\,\widehat{AB} + \text{mes}\,\widehat{BC} \equiv \text{mes}\,\widehat{AC}\ [2\pi]$ (Relation de Chasles).

$\text{mes}\,\widehat{AB} \equiv -\text{mes}\,\widehat{BA}\ [2\pi]$.

Toute translation conserve les mesures des angles orientés.
Toute symétrie axiale transforme les mesures des angles orientés en leurs opposées

Exercice N°1 page N°44

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique, M et N deux points de $\mathscr{C}$ et α une mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{MN}$.

Trouver, dans chacun des cas suivants, la mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{MN}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$.

a. $\alpha = \dfrac{185\pi}{7}$; b. $\alpha = \dfrac{-228\pi}{3}$; c. $\alpha = \dfrac{2006\pi}{13}$.

II. Angles orientés

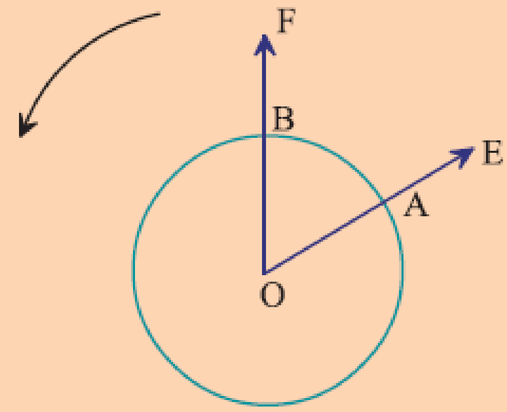
Définition

Soit O un point du plan orienté dans le sens direct et $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs non nuls.

On désigne par E et F les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OE}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OF}$ et par A et B les points d'intersection respectifs du cercle $\mathscr{C}$ et des demi-droites [OE) et [OF).

On appelle mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ toute mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$.



Propriétés et notation

- **Une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est notée $(\vec{u}, \vec{v})$**

Ainsi si α est une mesure en radian de $(\vec{u}, \vec{v})$

On note $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha [2\pi]$

et on lit $(\vec{u}, \vec{v})$ est congru à α modulo 2π.

- $(\vec{u}, \vec{u}) \equiv 0 [2\pi]$
- $(\vec{u}, -\vec{u}) \equiv \pi [2\pi]$
- $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -(\vec{u}, \vec{v}) [2\pi]$
- $(-\vec{u}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) [2\pi]$

- **Pour tout réel k non nul on a:** $(k\vec{u}, k\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v})\left[2\pi\right]$

- **Pour tous réel non nuls k et k' on a:**

Si k et k' sont de même signe alors

$$(k\vec{u}, k'\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v})\left[2\pi\right]$$

Si k et k' sont de signes contraires alors

$$(k\vec{u}, k'\vec{v}) \equiv \pi + (\vec{u}, \vec{v})\left[2\pi\right]$$

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

* $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv 0 \; [2\pi] \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens

* $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \pi \; [2\pi] \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires

* $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi]$ ou $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv -\frac{\pi}{2} \; [2\pi]$.

* $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{w}) [2\pi] \Leftrightarrow \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et de même sens

Activité

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **deux vecteurs non nuls.**
Déterminer la mesure α de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ **appartenant à]-π , π].**

1) $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \dfrac{157\pi}{6}[2\pi]$

2) $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \dfrac{2015\pi}{4}[2\pi]$

3) $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \dfrac{-1999\pi}{2}[2\pi]$

4) $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \dfrac{-1964\pi}{3}[2\pi]$

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **deux vecteurs non nuls.**

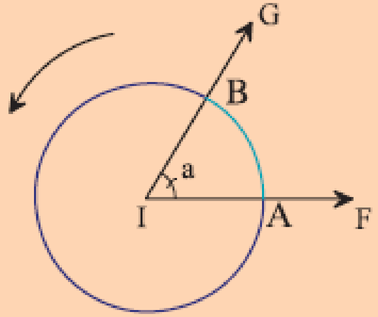
L'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ **admet une unique mesure appartenant à]-π , π] appelée mesure principale.**

Propriété

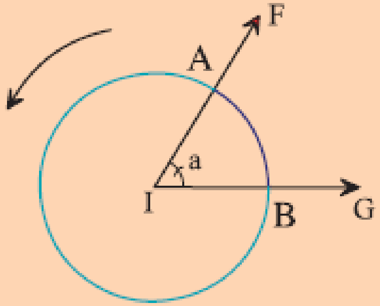
Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère trois points non alignés I, F et G tels que $\widehat{FIG} = a$.

Si L est la mesure de $\overset{\frown}{AB}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$ et α est la mesure principale de $(\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IG})$, alors

$$\alpha = \begin{cases} a & \text{si } 0 \leq L \leq \pi \\ -a & \text{si } \pi < L < 2\pi \end{cases}.$$



la mesure principale de $(\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IG})$ est égale à a.



la mesure principale de $(\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IG})$ est égale à –a.

Propriétés

Le plan est orienté dans le sens direct.

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$,

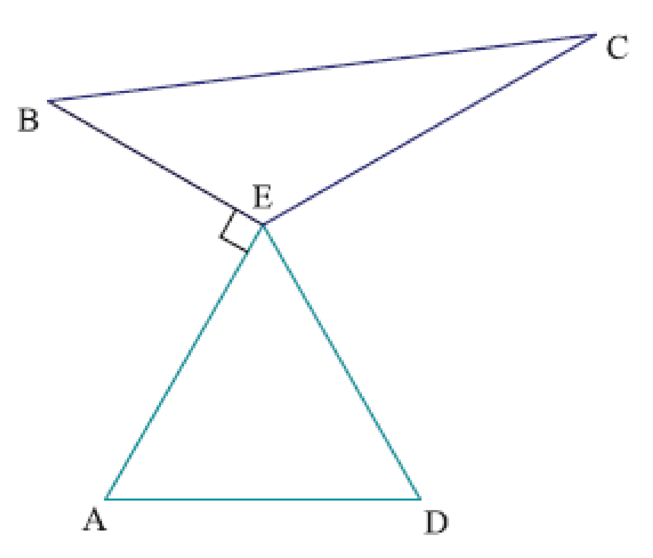
$$\widehat{(\vec{u}\,,\,\vec{w})} \equiv \widehat{(\vec{u}\,,\,\vec{v})} + \widehat{(\vec{v}\,,\,\vec{w})}\left[2\pi\right]$$ (Relation de Chasles).

$$(\vec{u},\vec{v}) \equiv (\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'})\left[2\pi\right] \Leftrightarrow (\vec{u},\overrightarrow{u'}) \equiv (\vec{v},\overrightarrow{v'})\left[2\pi\right]$$

Activité N°1 page 35

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle équilatéral AED. On suppose de plus que (EA) est perpendiculaire à (EB) et $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

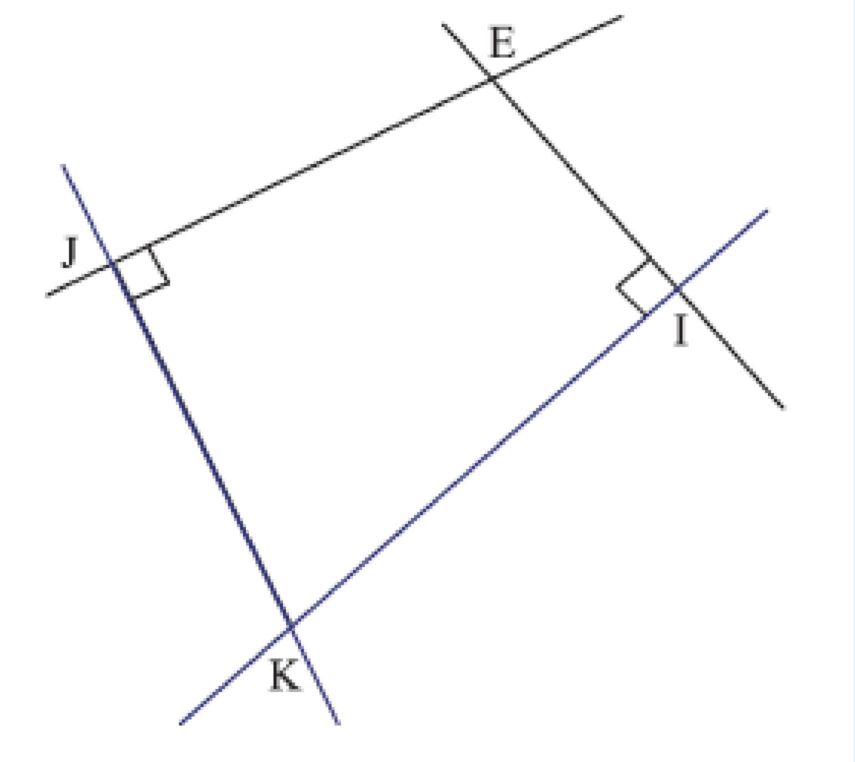
Donner la mesure principale de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})$; $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EB})$; $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EC})$.



Activité N°2 page 35

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère quatre points E, I, J et K tels que les droites (KI) et (KJ) sont respectivement perpendiculaires aux droites (EI) et (EJ).

Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{EI}, \overrightarrow{EJ}}) = (\widehat{\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KJ}}) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.



Exercice

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère trois points A, B et C tels que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Soit D un point distinct de A tels que les droites (AD) et (AB) sont perpendiculaires et E un point tel que $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Montrer que les droites (AE) et (AC) sont perpendiculaires

Propriété

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC .

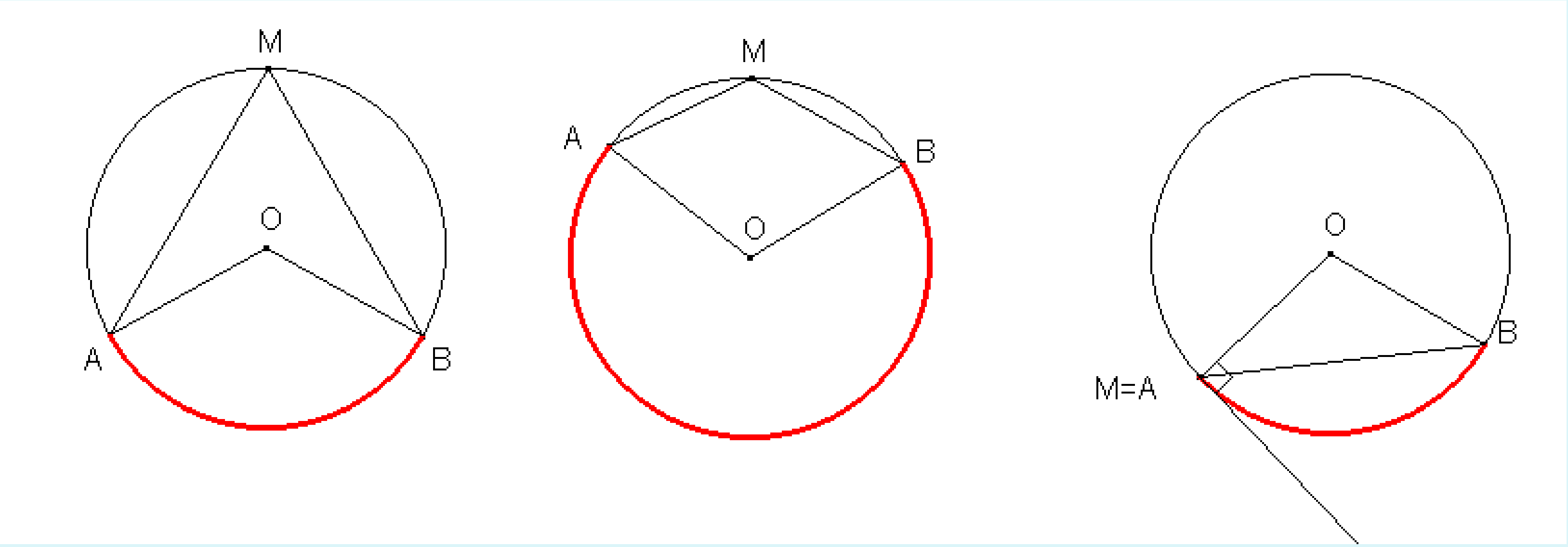
Montrer que :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\equiv\pi\left[2\pi\right]$$

III. Cercle et angles

Définition

Soit $\widehat{AMB}$ un angle inscrit dans un cercle (C) et $\widehat{AOB}$ l'angle au centre qui intercepte le même arc. On dit que l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est l'angle au centre associé à l'angle orienté inscrit $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$



Activité N°1 page 37

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre A, B et C sont trois points d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

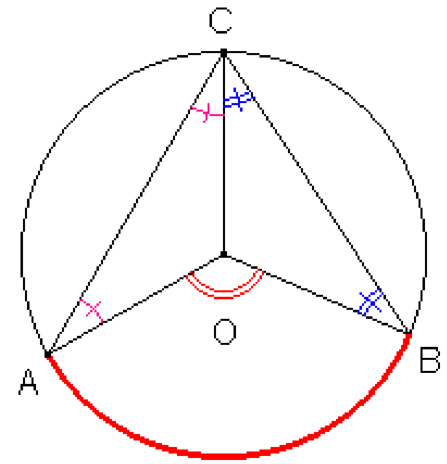
On se propose de montrer que $2\,(\widehat{\overrightarrow{CA}\,,\,\overrightarrow{CB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\,\overrightarrow{OB}})\left[2\pi\right]$.

1. En remarquant que le triangle OAC est isocèle en O, montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OC}\,,\,\overrightarrow{OA}}) = \pi - 2(\widehat{\overrightarrow{CA}\,,\,\overrightarrow{CO}}) + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. En déduire que $2(\widehat{\overrightarrow{CA}\,,\,\overrightarrow{CO}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\,\overrightarrow{CO}})\left[2\pi\right]$.

3. Montrer de même que $2(\widehat{\overrightarrow{CB}\,,\,\overrightarrow{CO}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OB}\,,\,\overrightarrow{CO}})\left[2\pi\right]$.

4. Conclure.

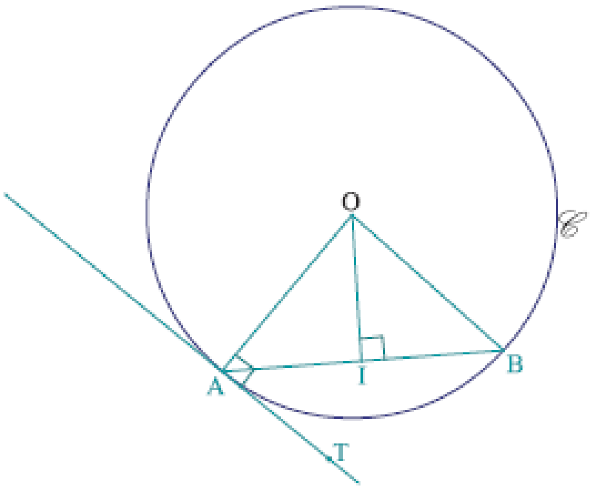


Activité N°2 page 37

Le plan est orienté dans le sens direct.
Dans la figure ci-dessous la droite (AT) est tangente au cercle C en A.
On se propose de montrer que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})\left[2\pi\right]$

1) **Soit I le milieu de [AB]. En remarquant que les droites (OA) et (OI) sont perpendiculaires aux droites (AT) et (AB), comparer** $2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})$ **et** $2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI})$

2) **Conclure.**

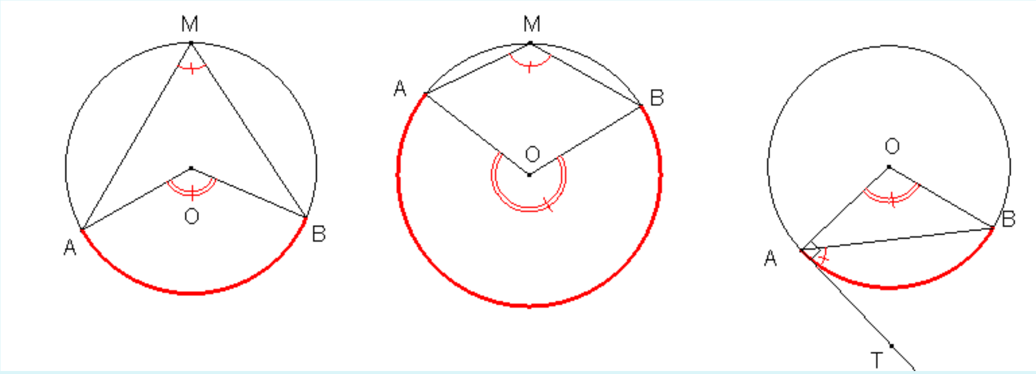


Théorème

Soit $\mathscr{C}$ un cercle un cercle de centre O dans le plan orienté dans le sens direct.

- **Pour tous points distincts A, B et M du cercle C on a:** $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})[2\pi]$

- **Si la droite (AT) est tangente au cercle $\mathscr{C}$ en A, alors on a:** $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})[2\pi]$



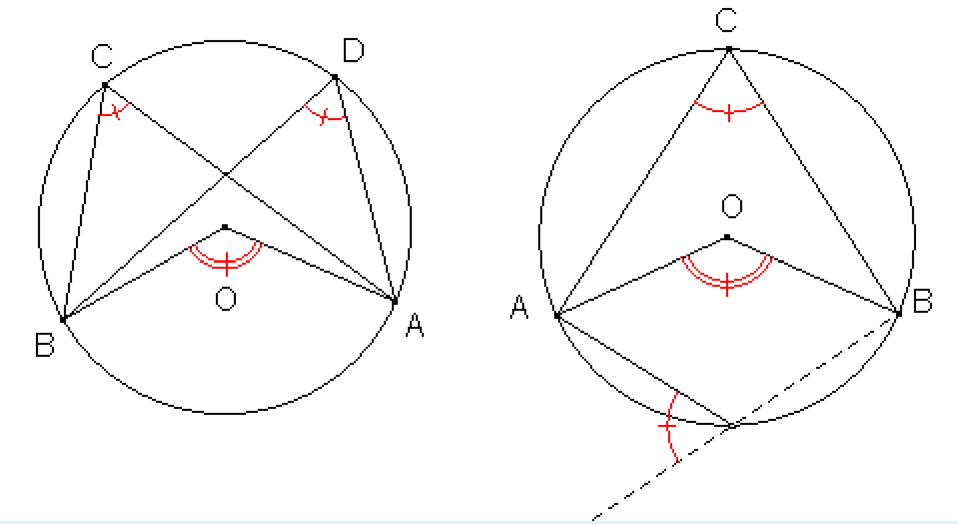
Théorème (admis)

Soit A, B, C et D quatre points deux à deux distincts d'un cercle du plan orienté dans le sens direct.

- **Si C et D sont sur le même arc orienté $\overset{\curvearrowright}{AB}$ alors :**

$$(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})\equiv(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})[2\pi]$$

- **Si l'un des points C et D est sur $\overset{\curvearrowright}{AB}$ et l'autre ne l'est pas alors:** $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})\equiv\pi+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})[2\pi]$



Ensemble des points M vérifiant: $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv\theta\left[2\pi\right]$

Soit A et B deux points du plan P orienté dans le sens direct et θ un réel donné.
On se propose de déterminer, suivant les valeurs de θ l'ensemble

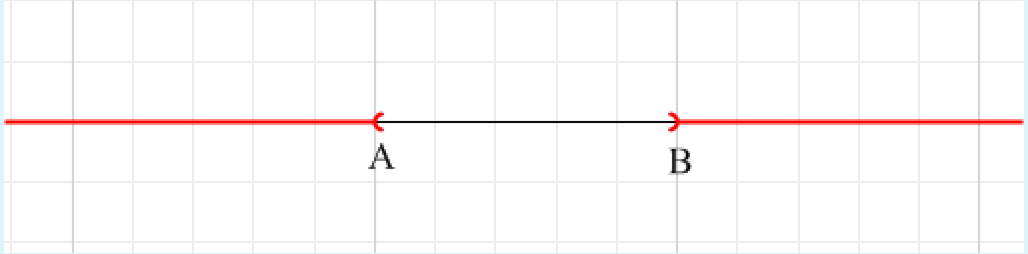
$$\Gamma = \{\ M\in P\ /\ (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv\theta\left[2\pi\right]\ \}$$

1er cas: $\theta = 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$M\in\Gamma \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv 0\left[2\pi\right]$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ **sont colinéaires et de même sens**

d'où $\Gamma = (AB) \setminus [AB]$

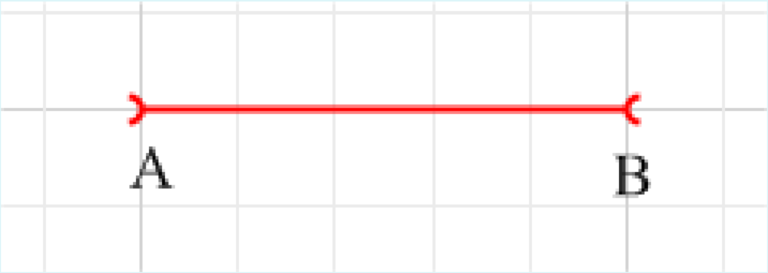


$2^{\text{ième}}$ cas: $\theta = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$

$M \in \Gamma \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \pi [2\pi]$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ **sont colinéaires et de sens contraires**

d'où $\Gamma = [AB] \setminus \{A, B\}$



$3^{\text{ième}}$ cas: $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

1) Soit un point T tel que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \theta [2\pi]$

a) Montrer qu'il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B et tangent à (AT) en A.

b) Soit M un point de l'arc orienté $\overset{\frown}{BA}$ distinct de A et B. Déterminer $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$

2. Soit N un point du plan tel que $(\widehat{\overrightarrow{NA}\ ,\ \overrightarrow{NB}}) \equiv \theta\left[2\pi\right]$.

Soit $\mathscr{C}'$ le cercle circonscrit au triangle NAB et O' son centre.

a. Déterminer $(\widehat{\overrightarrow{O'A}\ ,\ \overrightarrow{O'B}})$, puis $(\widehat{\overrightarrow{AO'}\ ,\ \overrightarrow{AB}})$.

b. En déduire que (AT) est tangente à $\mathscr{C}'$ en A.

c. Où se trouve alors le point N ?

3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA}\ ,\ \overrightarrow{MB}}) \equiv \theta\left[2\pi\right]$, $\theta \neq k\pi$.

Théorème

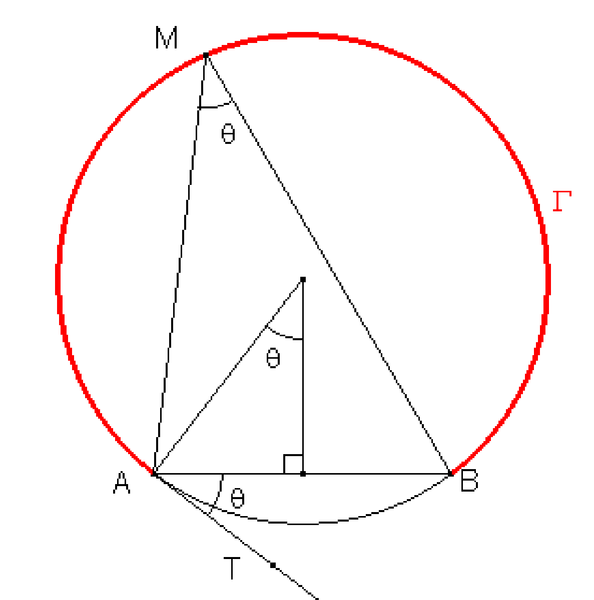
Soit A et B deux points du plan P orienté dans le sens direct et $\theta \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$.

On désigne par Γ l'ensemble des points M du plan vérifiant: $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta [2\pi]$

- **Il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B et tangent en A à la demi droite [AT) tel que:**

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \theta [2\pi]$$

- **Si $\theta \in]0, \pi[$ alors $\Gamma = \overset{\frown}{BA} \setminus \{A, B\}$**
- **Si $\theta \in]-\pi, 0[$ alors $\Gamma = \overset{\frown}{AB} \setminus \{A, B\}$**



Application

Soit A et B deux points du plan P orienté dans le sens direct.

Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan vérifiant: $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv\theta\left[2\pi\right]$

1) $\theta=\frac{\pi}{2}$ 2) $\theta=-\frac{\pi}{2}$ 3) $\theta=\frac{\pi}{6}$

4) $\theta=-\frac{\pi}{6}$ 5) $\theta=\frac{\pi}{4}$ 6) $\theta=\frac{3\pi}{4}$

Activité N°3 page 39

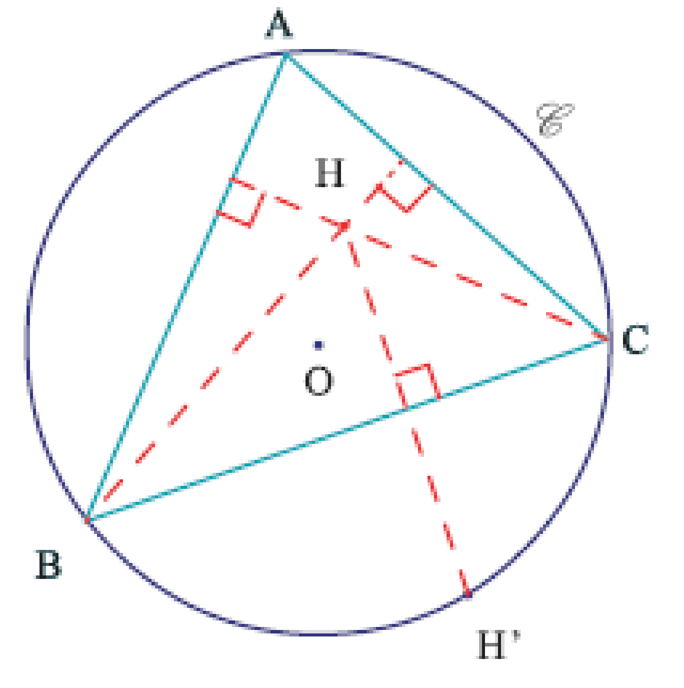
Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre ABC est un triangle inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ et H est son orthocentre.

1. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \pi - (\widehat{\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}}) \left[2\pi\right]$.

2. Soit H' le symétrique de H par rapport à (BC).

Comparer $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}})$.

3. En déduire que H' est un point de $\mathscr{C}$.



Définition

On dit qu'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan est orthonormée directe si

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| \text{ et } \widehat{(\vec{i}, \vec{j})} \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi].$$

On dit qu'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan est orthonormée indirecte si

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| \text{ et } \widehat{(\vec{i}, \vec{j})} \equiv -\frac{\pi}{2} \; [2\pi].$$

Définition

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls , et soit $\overrightarrow{u'}$ le vecteur vérifiant

$\left\|\vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{u'}\right\|$ et $\widehat{(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{u'})} \equiv \frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$.

On appelle déterminant de $(\vec{u}\ ,\ \vec{v})$ et on note dét $(\vec{u}\ ,\ \vec{v})$ le réel $\vec{v}.\overrightarrow{u'}$.

On convient que si l'un des vecteurs est nul, leur déterminant est nul.

Théorème

Le plan est orienté dans le sens direct.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **deux vecteurs non nuls.**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ **sont colinéaires**

si et seulement si

$$\text{dét}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Activité N°5 page 41

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit $(\vec{u}\ ,\ \vec{v})$ une base orthonormée directe.

Montrer que $\text{dét}(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = 1$.

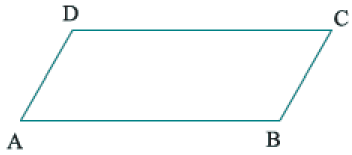
Soit $(\vec{u}\ ,\ \vec{v})$ une base orthonormée indirecte.

Montrer que $\text{dét}(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = -1$.

Activité N°6 page 41

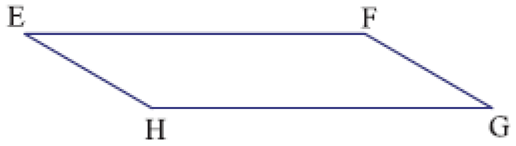
Le plan est orienté dans le sens direct.

1. Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme, tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, AB = 5 et AD = 2.



Calculer $\text{dét}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

2. Dans la figure ci-contre, EFGH est un parallélogramme, tel que $(\widehat{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$, $EF = 2\sqrt{3}$ et $EH = 1.5$.



Calculer $\text{dét}(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH})$.