Produit scalaire dans le plan

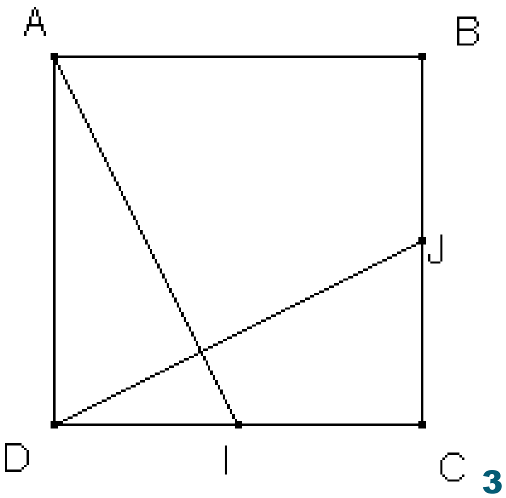
I. Préliminaire

1. Activité N°1

Dans la figure ci-dessous, ABCD est un carré.

I et J sont les milieux respectifs des segments [CD] et [BC].

On se propose dans cette activité de démontrer que les droites (AI) et (DJ) sont perpendiculaires.

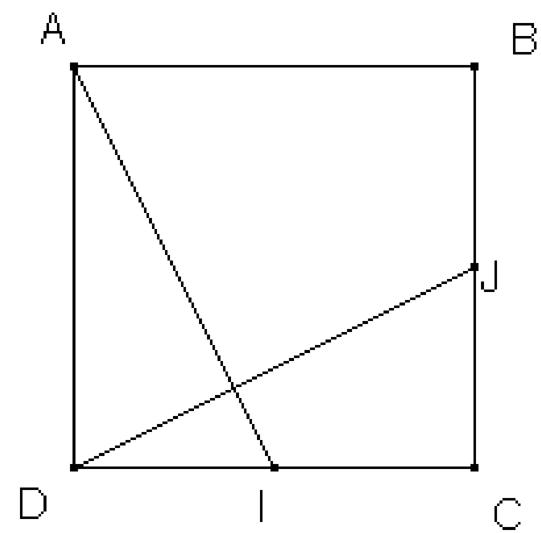


On pose AB = a (a > o) et on rapporte le plan au repère orthonormé $(D, \vec{i}, \vec{j})$ tel que: $\vec{i} = \frac{1}{a}\overrightarrow{DC}$ et $\vec{j} = \frac{1}{a}\overrightarrow{DA}$

a) Déterminer les coordonnées des points I, C, J, B et A.

b) Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{DJ}$ sont orthogonaux.

c) Conclure.



2. Commentaire

Ce chapitre a pour objectif d'introduire une nouvelle notion qui va nous permettre de résoudre ce problème, ainsi que d'autres, d'une manière plus simple!

II. Produit scalaire

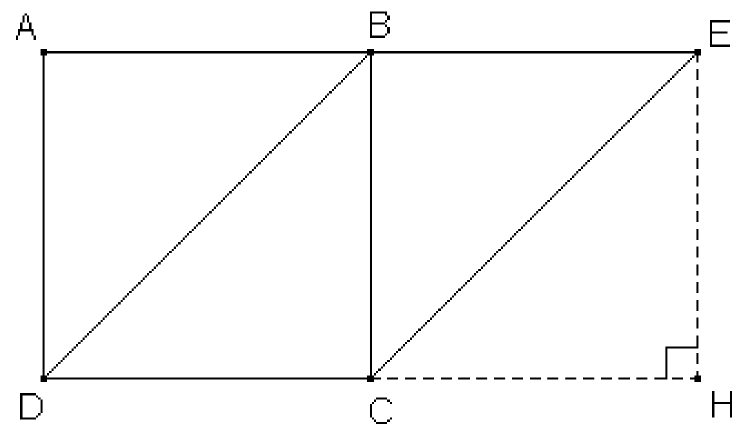
1. Activité N°2 (l'activité N°1 page 6 du manuel scolaire)

Dans la figure ci-dessous, ABCD est un carré de côté a, BECD est un parallélogramme et H est le projeté orthogonal de E sur la droite (DC).

1. Calculer en fonction de a les réels $\left\|\overrightarrow{DB}\right\|$et $\left\|\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BC}\right\|$

2. Calculer $\cos\widehat{BDC}$ et $\cos\widehat{EDH}$.

3. Calculer $\left\|\overrightarrow{DB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{DC}\right\|\cos\widehat{BDC}$ et $\left\|\overrightarrow{DE}\right\|\times\left\|\overrightarrow{DC}\right\|\cos\widehat{EDC}$



2. Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. O un point du plan,

A et B les points définis par : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} OA.OB.\cos \widehat{AOB} & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

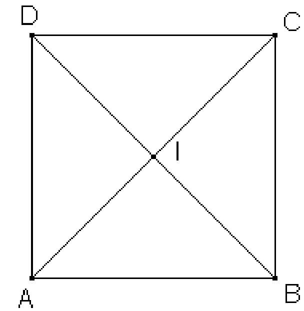
3. Application N°1

a) Soit ABCD un carré de sens direct, de côté 4 et de centre I.

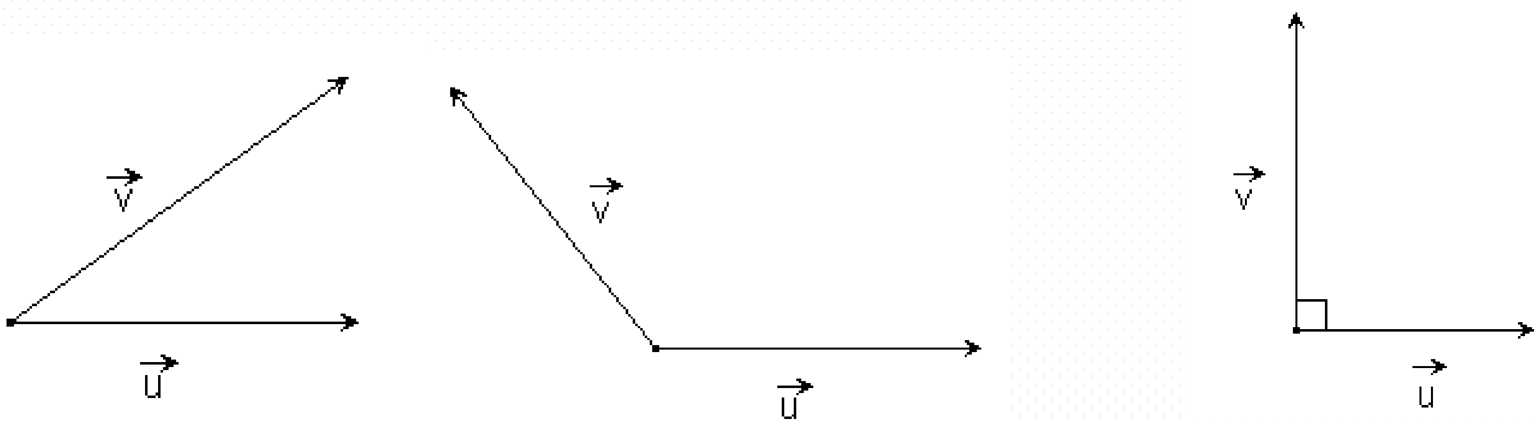
Calculer:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\,,\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}\,,\ \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}\,,$$

$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD}\,,\ \overrightarrow{DI}.\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{DI}.\overrightarrow{IB},\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}$$



b) Préciser le signe de $\vec{u}.\vec{v}$ dans chacun des cas suivants:



4. Conséquences

a) [$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colineaires] ssi [$|\vec{u}.\vec{v}| = \ldots$]

b) soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

*[$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colineaires et de même sens] ssi [$\vec{u}.\vec{v} = \ldots$]

*[$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colineaires et de sens contraires] ssi [$\vec{u}.\vec{v} = \ldots$]

c) [$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux] ssi [$\vec{u}.\vec{v} = ...$]

d) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

e) Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u}.\vec{u} = ...$

f) $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (Inégalité de Cauchy schawrz)

5. Propriétés du produit scalaire

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$

N.B: les propriétés précédentes sont connues sous le nom de règles du parallélogramme.

Théorème d'El-kashi

Soit ABC un triangle.

On pose: $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\widehat{C}$$

Application

ABC est un triangle avec: $AC = 3$; $AB = 8$ et $B\hat{A}C = \pi/3$. Calculer BC.

Théorème

Soit ABC un triangle.

On pose a = BC, b = AC et c = AB et on désigne par R le rayon du cercle circonscrit à ABC et par S l'aire de ce triangle

$$\frac{a}{sin\hat{A}} = \frac{b}{sin\hat{B}} = \frac{c}{sin\hat{C}} = 2R$$

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ on a:

$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$$

Activité N°4

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et k un réel. O est un point du plan.

On suppose que $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $k \neq 0$

On désigne par A, B, A' et B' les points du plan définis par :

$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OA'} = k\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB'} = k\vec{v}$.

a) Comparer, suivant le signe de k, $\cos A\hat{O}B$ et $\cos A'\hat{O}B$

b) Etablir alors l'égalité : $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$

c) Montrer que : $\vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$

En remarquant que les égalités précédentes restent valables pour

$\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $k = 0$, on déduit :

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tout réel k, on a:

$$(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$$

Activité N°5

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs ; k et k' deux réels. O est un point du plan.

On suppose que $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, $k \neq 0$ et $k' \neq 0$

On désigne par A, B, A' et B' les points du plan définis par:

$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OA'} = k\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB'} = k'\vec{v}$.

a) On suppose que k et k' sont de même signe.

Comparer $\cos A\hat{O}B$ et $\cos A'\hat{O}B'$ et en déduire l'égalité:

$$(k\vec{u}).(k'\vec{v}) = kk'(\vec{u}.\vec{v})$$

b) On suppose que k et k' sont de signes contraires.

Montrer que: $(k\vec{u}).(k'\vec{v}) = kk'(\vec{u}.\vec{v})$

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tout réel k on a:

$$(k\vec{u}).(k'\vec{v}) = kk'(\vec{u}.\vec{v})$$

Activité N°5 page 9

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{w} = 1$ et $\vec{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0,5$.

1. Calculer $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot \overrightarrow{w}$ et $-\vec{v} \cdot (\vec{u} - \overrightarrow{w})$.
2. Calculer $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \overrightarrow{w}) + \vec{v} \cdot (\overrightarrow{w} - \vec{u}) + \overrightarrow{w} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

Activité N°6 page 9

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

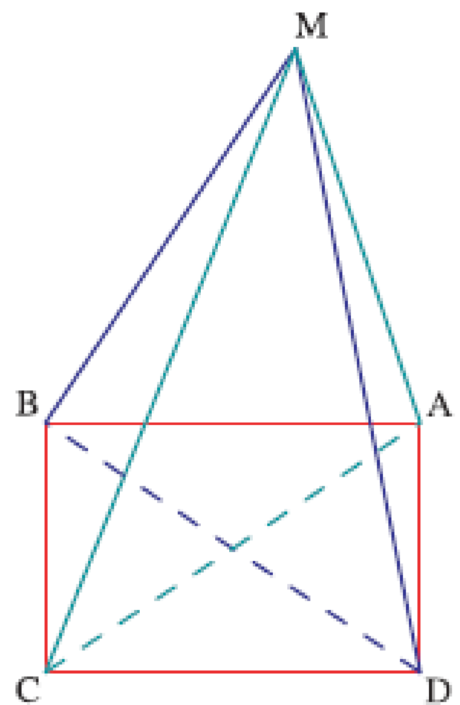
Soit O, A et B trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

On suppose que $OA = 2$, $OB = 3$ et $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{6}$.

Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$, $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ et $(2\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - 3\vec{v})$.

Activité N°7 page 9

Soit M un point du plan.
Montrer que la somme des carrés des distances de M à deux sommets opposés d'un rectangle est égale à la somme des carrés des distances de M aux deux autres sommets.



Application N°4

Soit A et B deux points distincts.

Déterminer chacun des ensembles suivants:

$$\Delta = \{M \in P \ \text{tel que} : \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 0\}$$

$$\Gamma = \{M \in P \ \text{tel que} : \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0\}$$

Commentaire

Δ et Δ' sont deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$.

$$[\, \Delta \perp \Delta' \,] \Leftrightarrow [\, \vec{u} \cdot \overrightarrow{u'} = 0 \,]$$

6. Produit scalaire

et projection orthogonale

Activité N°6

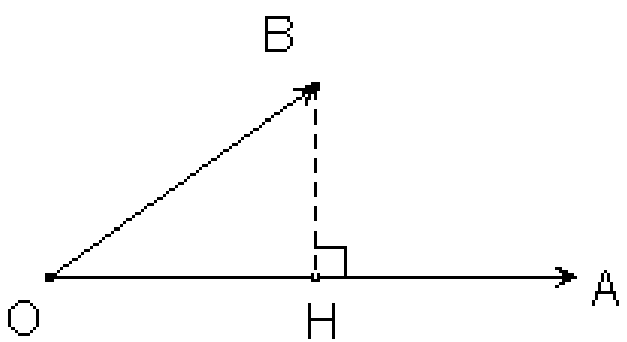
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. O un point du plan,

A et B les points définis par : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

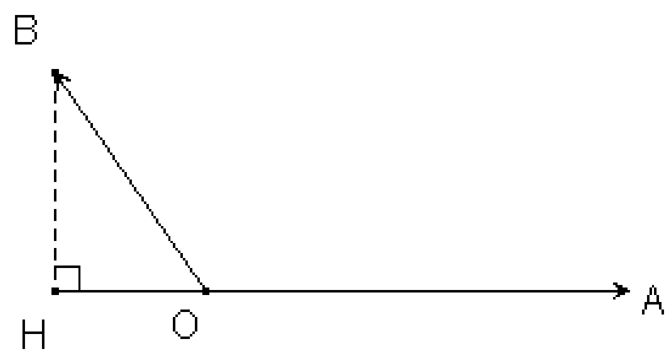
On désigne par H le projeté orthogonal de B sur (OA)

a) Montrer que: $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

b) Exprimer $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction de OA et OH dans chacun des cas suivants:



$\vec{u}.\vec{v} = ...$



$\vec{u}.\vec{v} = ...$

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. O un point du plan,

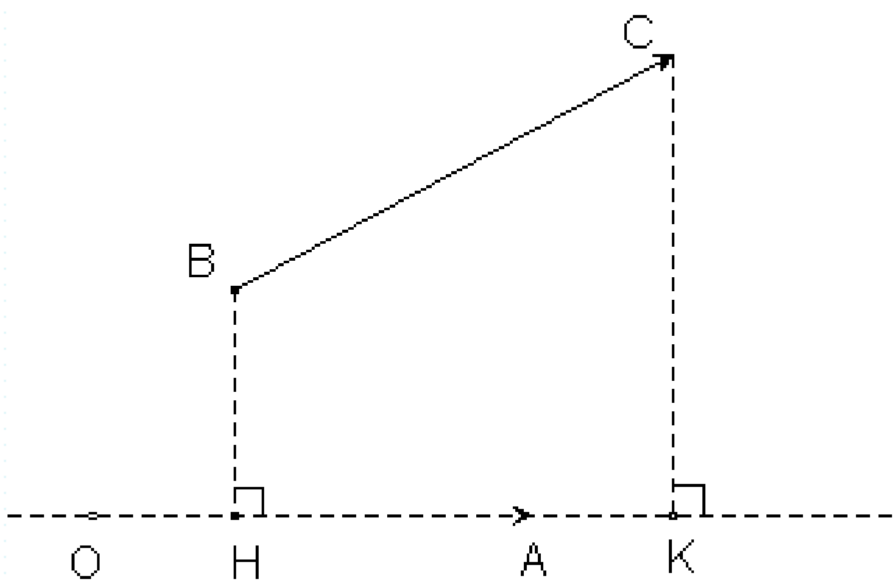
A et B les points définis par : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$$

Où H est le projeté orthogonal de B sur (OA)

Activité N°2 page N°11

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
On désigne par O, A, B et C quatre points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.
On désigne par H et K les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur la droite (OA).
Montrer que $\vec{u} \,.\, \vec{v} = \overrightarrow{OA} \,.\, \overrightarrow{HK}$.



Activité N°3 page N°11

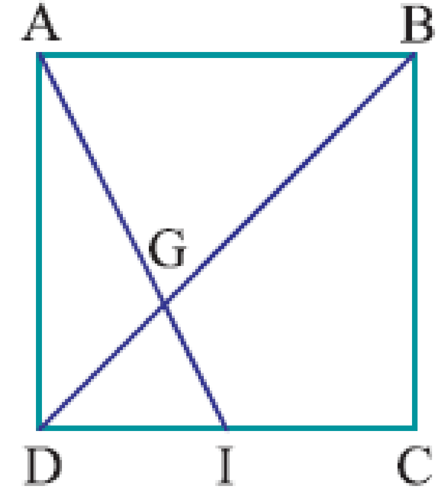
Soit ABCD un carré de côté 3, I le milieu de [DC] et G le point d'intersection de [BD] et [AI].

1. a. Calculer AI, GB, GD, GA et GI.

   b. En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GD}$.

2. a. Calculer $\cos \widehat{IAB}$ et $\cos \widehat{DGI}$.

   b. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près en radians de $\widehat{IAB}$ et $\widehat{DGI}$.



Activité

Soit A et B deux points distincts,

1/ Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = AB \times AM$$

2/ Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = -AB \times AM$$

7. Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormé

<u>N.B:</u> dans ce qui suit, l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan muni d'une base orthonormée $(O,\vec{i},\vec{j})$

Activité N°7

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

a) Exprimer en fonction de x et y $\vec{i}.\vec{u}$, $\vec{j}.\vec{u}$ et $\|\vec{u}\|$.

b) Exprimer $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction de x, y, x' et y'.

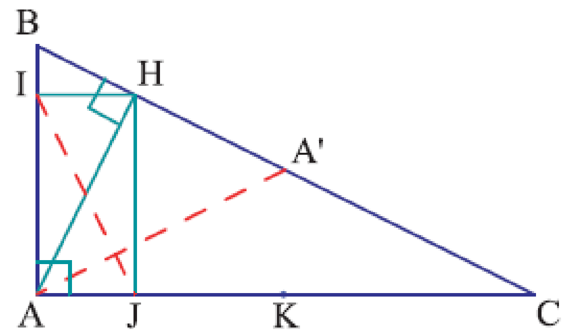
Théorème

$$\boxed{\text{Si } \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ alors } \vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$$

Activité N°3 page N°12

Dans la figure ci-contre, $AB = 1$ et ABC est un triangle rectangle en A tel que $AC = 2\ AB$.

On désigne par A' et K les milieux respectifs de [BC] et [AC] et par H, I et J les projetés orthogonaux respectifs de A sur (BC), de H sur (AB) et de H sur (AC).



1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, K et A' dans le repère $\left(A,\ \overrightarrow{AK},\ \overrightarrow{AB}\right)$.
2. Déterminer une équation de la droite (AH).
3. Déterminer les coordonnées du point H puis des points I et J.
4. Calculer $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{IJ}$ et en déduire les positions relatives des droites (AA') et (IJ).

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit A et B deux points distincts.

1) Soit E l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$.

Déterminer analytiquement l'ensemble E dans chacun des cas:

a) $\vec{u}=2\vec{i}$, A(1,1) et k = 3 b) $\vec{u}=-3\vec{i}+4\vec{j}$, A(2,3) et k = - 5

2) Soit E l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k$.

Déterminer analytiquement l'ensemble E dans chacun des cas:

a) A(1,2); B(-3,4) et k = 0 b) A(4,0); B(0,1) et k = $-\frac{1}{4}$

c) A(2,-1); B(5,3) et k = - 7

3) Soit E l'ensemble des points M du plan vérifiant: $\frac{MA}{MB}=k$

Déterminer analytiquement l'ensemble E dans chacun des cas:

a) A(-1,0); B(2,0) et k = 1 b) A(-1,0); B(2,0) et k = 2