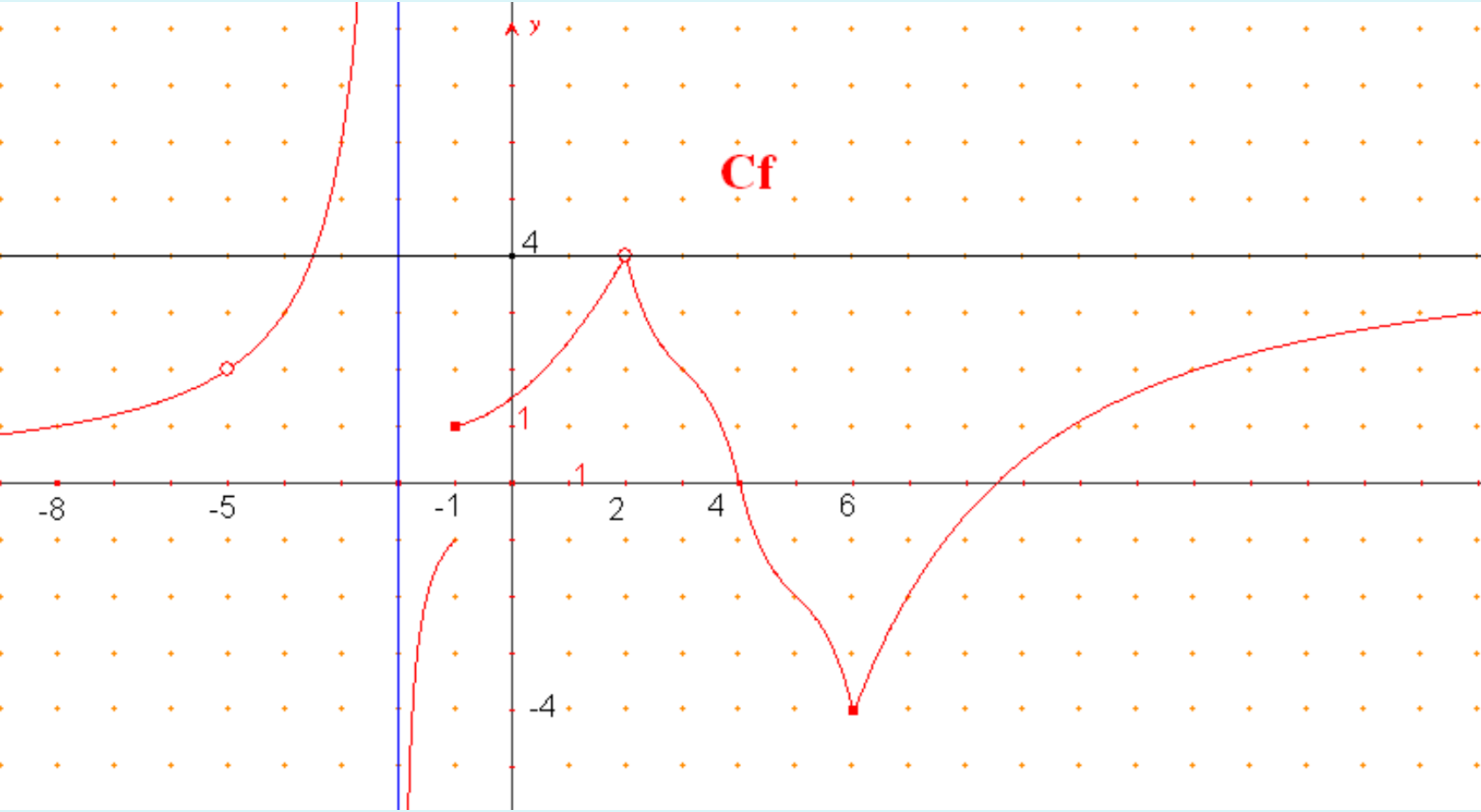
Limites et continuité

Cours élaboré par le prof: Chouihi

Activité N°1

Dans la figure ci-dessous on a représenté graphiquement une fonction f .



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes:

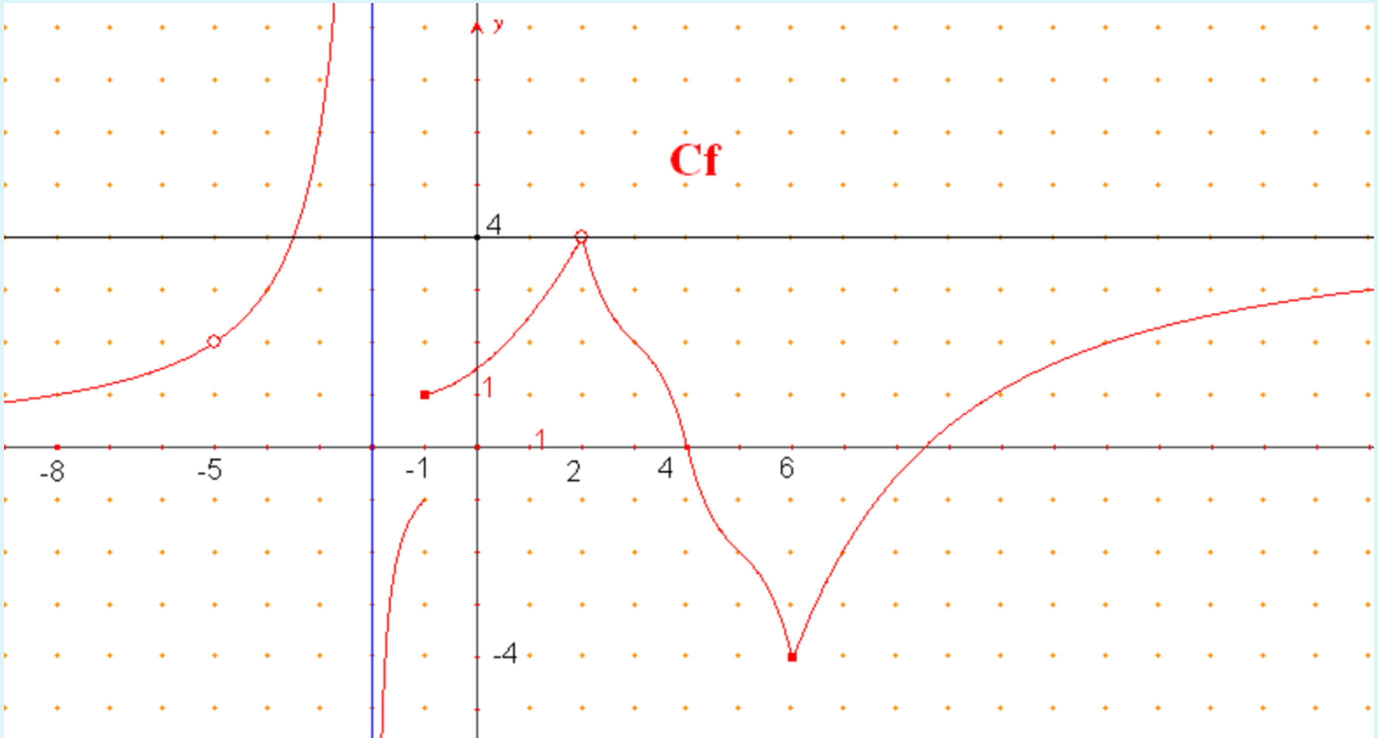
1/ Déterminer Df.

2/ Donner: $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

3/ Peut on prolonger f par une fonction continue:

a/ en -5? b/ en -2? c/ en 2?



Activité N°2

On pose $f(x) = \frac{x^2-7x+12}{x-3}$

1/ Préciser Df

2/ A l'aide de votre calculatrice estimer $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

3/ Simplifier l'expression de f(x)

4/ En déduire $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

Commentaire

- f est définie au voisinage de 3 mais non pas en 3.
- Pour tout $x \in IR \backslash \{3\}$, $f(x) = g(x)$ avec $g(x) = x - 4$
- g est définie et continue sur IR et en particulier en 3 donc:

$$\lim_{x\to 3} g(x) = g(3) = -1$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} g(x) = -1$$

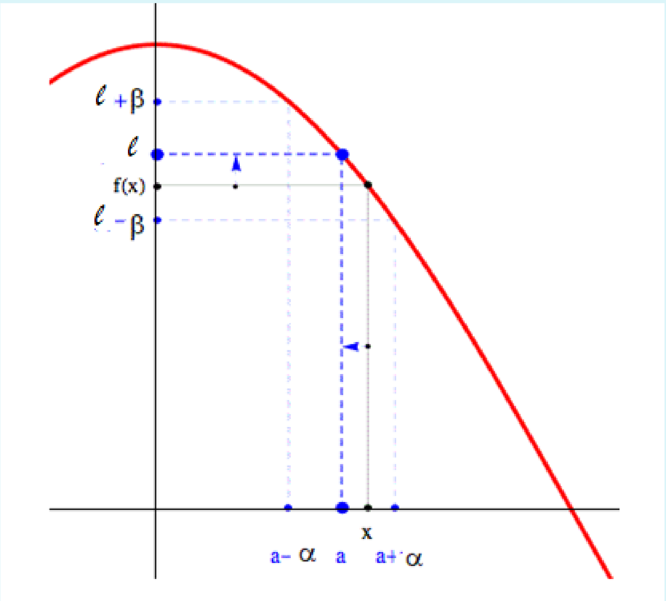
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf peut être en $a \in I$ et $\ell \in IR$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour tout réel $\beta > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

Si ($x \in I$ et $0 < |x - a| < \alpha$) alors $|f(x) - \ell| < \beta$

NB: on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a} f = \ell$



Définitions

1/ Soit f une fonction définie sur]a, a+h[(h > 0) et $\ell \in$ IR.

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$ si et seulement si pour tout réel $\beta > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

Si ($x \in]a,a+h[$ et $0 < x - a < \alpha$) alors $|f(x) - \ell| < \beta$

2/ Soit f une fonction définie sur]a-h, a[(h > 0) et $\ell \in$ IR.

$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$ si et seulement si pour tout réel $\beta > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

Si ($x \in]a-h,a[$ et $-\alpha < x - a < 0$) alors $|f(x) - \ell| < \beta$

Théorème

1/ Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a$\in$I.

$$[\text{f est continue en a }] \Leftrightarrow [\lim_{x \to a} f(x) = f(a)]$$

2/ Soit f une fonction définie sur [a,a+h[(h > 0).

$$[\text{f est continue à droite en a }] \Leftrightarrow [\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)]$$

3/ Soit f une fonction définie sur]a – h, a] (h > 0).

$$[\text{f est continue à gauche en a }] \Leftrightarrow [\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)]$$

Application

Application N°1

Calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

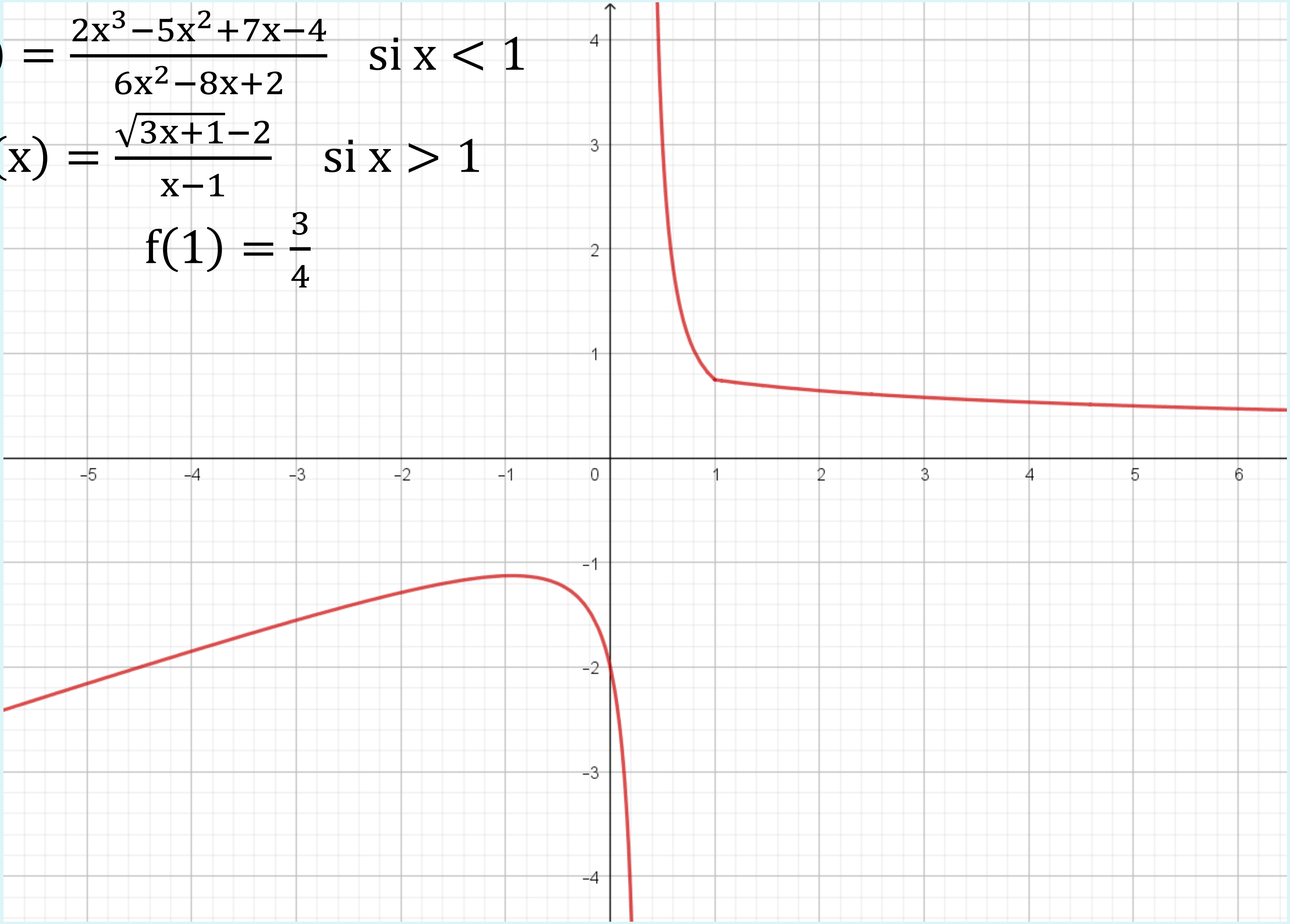
1/ $f(x) = x^3 + 8x^2 + 5x - 2$; $a = 1$ **2/** $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3}$; $a = 3$

Application N°2

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^3-5x^2+7x-4}{6x^2-8x+2} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ f(1) = \dfrac{3}{4} & \end{cases}$

Montrer que f est continue en 1.

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^3-5x^2+7x-4}{6x^2-8x+2} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ f(1) = \dfrac{3}{4} & \end{cases}$$



Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf peut être en $a \in I$ et g une fonction définie sur I et vérifiant: pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ $f(x) = g(x)$.

si g est continue en a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(a)$

Application

Calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

1/ $f(x) = \dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{2x^2-7x+6}$ $\qquad a = 2$

2/ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ $\qquad a = 0$

Définition

Soit f une fonction définie sur I \{a}.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ ($\ell \in$ IR) alors la fonction F définie sur I par:

$$\begin{cases} F(x) = f(x) \ \text{si } x \neq a \\ F(a) = l \end{cases}$$

est continue en a et elle est appelée **prolongement par continuité** de f en a.

Exercice N°2 (Série)

1/ Déterminer le domaine de définition D_f de $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$

2/ Etudier la continuité de f sur son domaine de définition D_f.

3/**a**- Montrer que pour tout $x \in D_f$; $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}$

b- Calculer $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

4/ Soit h la fonction définie par $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^2-5x+4} & \text{si } x < 1 \\ x - \dfrac{5}{2} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ f(x) & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a- Montrer que h est continue en 3.

b- Etudier la continuité de h en 1.

5/**a**- Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $]2;6[$

b- Donner un encadrement de α d'amplitude inférieur à 2.

Exercice N°4 (Série)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+x-2}$.

1/ Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2/ Vérifier que pour tout x de D_f; $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)\left[\sqrt{x+3}+2\right]}$.

3/ f est-elle prolongeable par continuité en 1?

4/a) Calculer $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$.

b) f est-elle majorée?

5/ Soit $F :]-2,+\infty[\to IR$

$$x \mapsto \begin{cases} F(x) = f(x) & \text{si } x \in]-2;1[\\ F(x) = \dfrac{x^2+2}{3x^2+18x+15} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Etudier le sens de variation de F sur]-2;1[

b) Montrer que F est continue sur $]-2;+\infty[$

c) Montrer que l'équation $F(x) = \dfrac{1}{8}$ admet au moins une solution α dans]0,2[.

d) Prouver que F est majorée par $\dfrac{1}{3}$ sur $[1;+\infty[$

d) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

Activité

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = |x^2 - 1|$

On pose $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ pour $x \neq 1$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} \varphi(x)$

b/ Que peut on conclure pour la limite de φ en 1?

Théorème

1/ Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf peut être en $a \in I$

Si f admet une limite ℓ en a alors ℓ est unique.

2/ $[\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell\,] \Leftrightarrow [\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l\,]$

Exercice

On pose $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x-1} & si\ \ x < 1 \\ \dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3} + a & si\ x > 1 \end{cases}$

Pour quelle valeur de a f est-elle prolongeable par continuité en 1?

Activité

A l'aide de la calculatrice, conjecturer:

1/ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^{2n}}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{2n+1}}$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^{2n+1}}$ $n \in IN^*$

2/ / $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n}$ $n \in IN^*$

Exercice

On pose $f(x) = 2x^3 – 3x^2 - 5x – 1$

a) Peut-on par une lecture directe conclure la limite de f en $+\infty$

a) Conjecturer à l'aide de la calculatrice.

b) Prouver votre conjecture.

c) Déterminer la limite de f en $-\infty$

Théorème

Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

avec $a_n \neq 0, n \in IN *$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$

Application

1/ On pose $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 8x - 9$

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2/ On pose $f(x) = 2x - \sqrt{x}$

a/ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b/ Peut-on parler de limite de f en $-\infty$? Justifier.

Exercice

.

On pose $f(x) = \frac{3x^2-7x+2}{2x^2+3x+7}$

a) Peut-on par une lecture directe conclure la limite de f en $+\infty$?
a) Conjecturer à l'aide de la calculatrice.
b) Prouver votre conjecture.
c) Déterminer la limite de f en $-\infty$

Théorème

Soit $f(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{p} b_k x^k}$ avec $a_n \neq 0 \; et \; b_p \neq 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

Application

On pose $f(x) = \frac{x^3-5x^2+x+15}{3x^2-5x-12}$

a) Déterminer Df

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

c) f est elle prolongeable par continuité en 3? Si oui préciser son prolongement.

d) f est elle prolongeable par continuité en (-4/3) ?

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf peut être en $a \in I$ et $\ell \in I$

$$Si \begin{cases} pour\ tout\ x \in I \backslash \{a\}, f(x) > 0 \\ \lim_{x \to a} f(x) = l \end{cases} \quad \text{alors } \ell \geq 0$$

Opérations sur les limites

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to a}(f+g)(x)$	$\lim_{x\to a}(f\times g)(x)$
L	L'	$L+L'$	$L\times L'$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$L>0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	*FI*
0	$-\infty$	$-\infty$	*FI*
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	*FI*	$-\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} (\frac{f}{g})(x)$
L	$L' \neq 0$	L/L'
$L \neq 0$	0	∞ (R.S)
0	0	F.I
∞	∞	F.I
∞	L'	∞ (R.S)
L	∞	0

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf peut être en $a \in I$

1/ Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\ell|$

2/ Si en plus f est positive au voisinage de a alors:

a/ Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$

b/ Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = +\infty$

NB: les résultats du théorème ainsi que des deux tableaux précédents restent valables même si $a \in \{-\infty , +\infty\}$