Généralités sur les fonctions

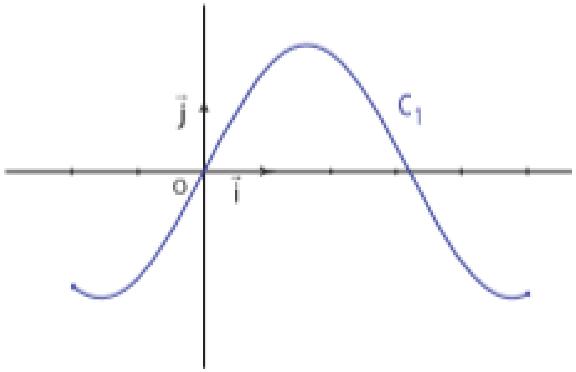
Cours élaboré par le prof: Chouihi

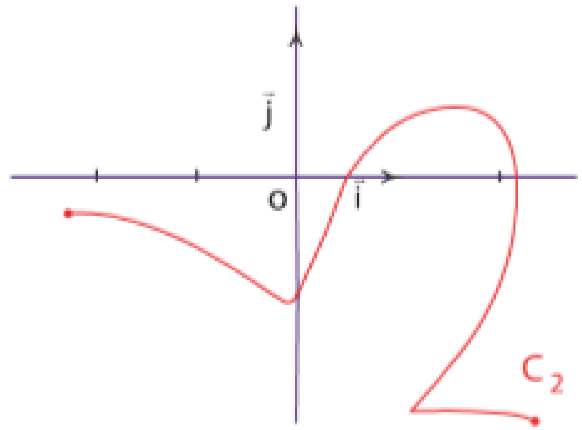
I. Pour commencer

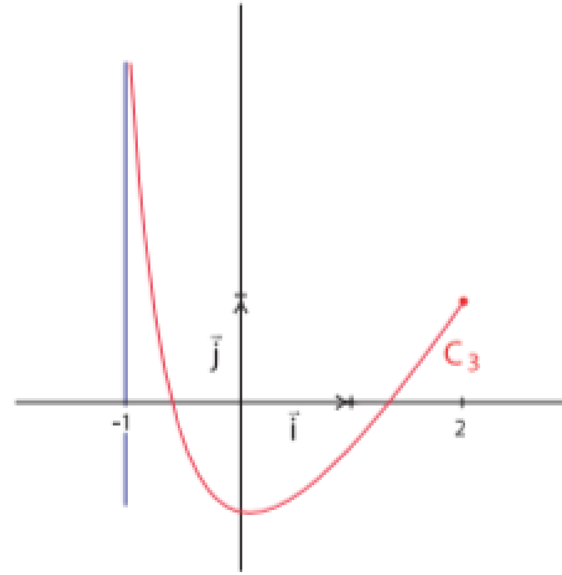
1. Activité 1 (page 6)

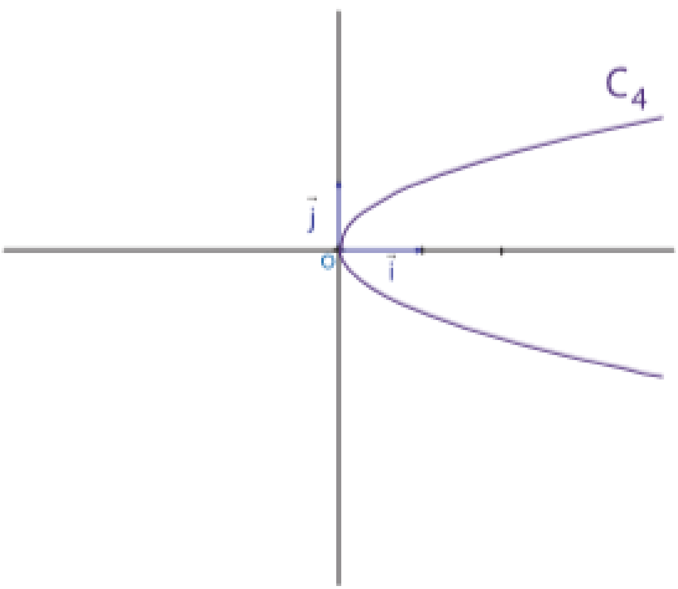
Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

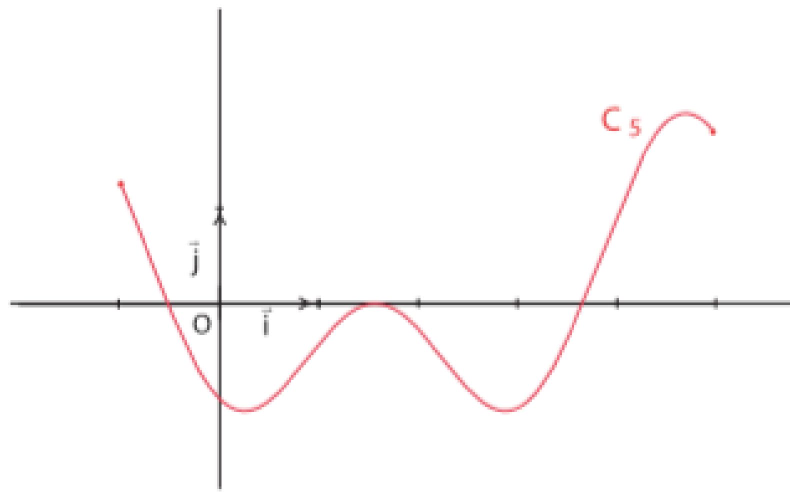
Parmi les courbes C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 tracées ci-dessous, préciser celles qui représentent une fonction et préciser l'ensemble de définition de la fonction en question.


$\vec{j}$
C_1
o
$\vec{i}$


$\vec{j}$
o
$\vec{i}$
C_2


$\vec{j}$
C_3
-1
$\vec{i}$
2


C_4
$\vec{j}$
o
$\vec{i}$


C_5
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$

2. Ensemble de définition

D_f = { $x \in IR$ tel que f(x) existe }

Activité N°2

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes:

1/ f: x → $\frac{2x+1}{3x-5}$

2/ f: x → $\frac{x^2-1}{3x^2-5x+2}$

3/ f: x → $\frac{2x+1}{2x^2-7x+6}$

4/ f: x → $\frac{2x+1}{5x^3-2x^2+6x-9}$

5/ f: x → $\frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

6/ f: x → $\sqrt{x^2-8x+15}$

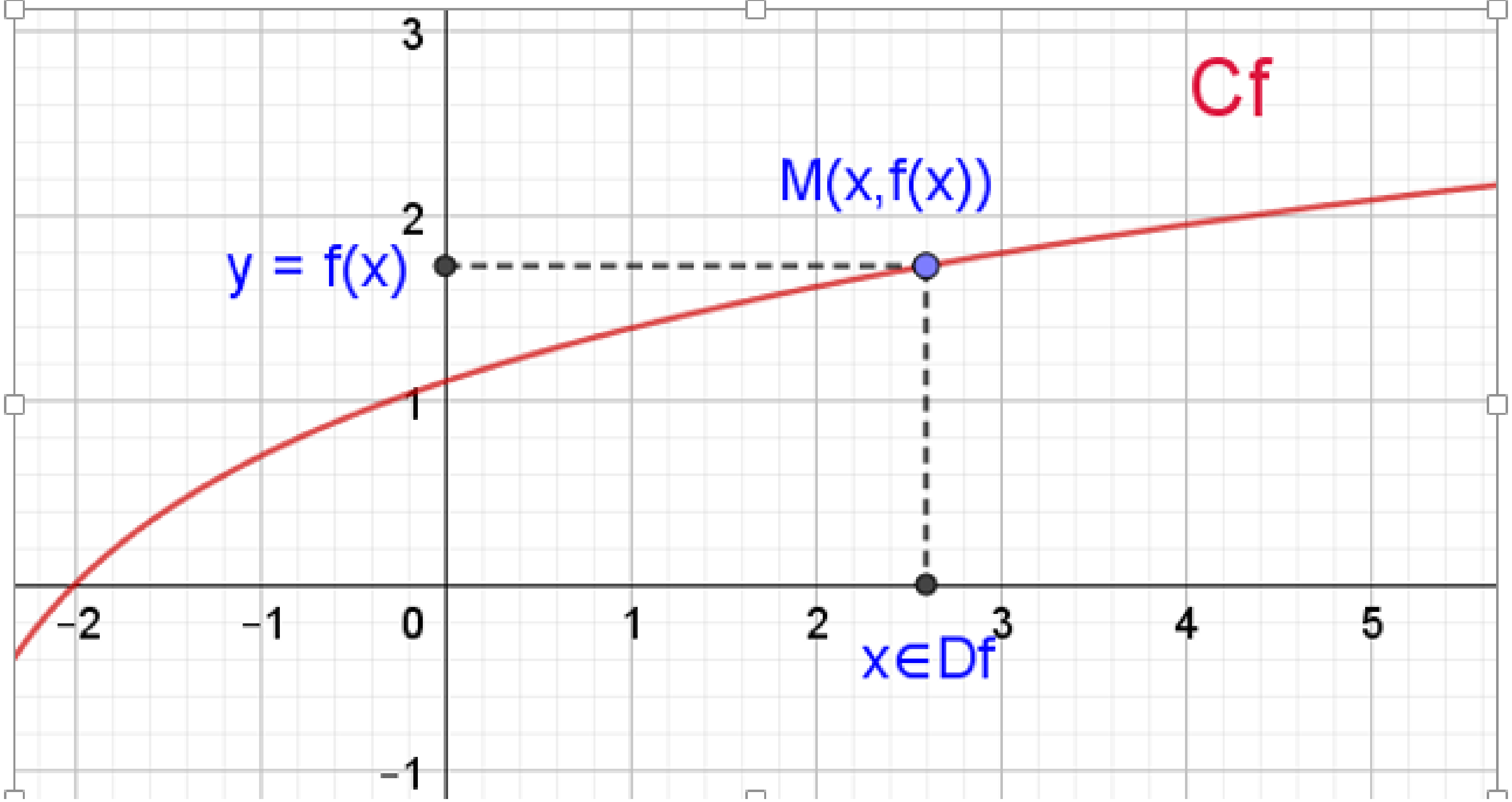
7/ f: x → $\sqrt{\frac{x^2-7x+10}{2x^2-7x+6}}$

8/ f: x → $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}$

3. Courbe d'une fonction

$$C_f = \{ M(x , y) \in P \text{ tel que: } x \in D_f \ \& \ y = f(x) \}$$

$$= \{ M(x , f(x)) \in P \text{ tel que: } x \in D_f \}$$



Application N°1

Par lecture graphique déterminer :

1) Df

2) f(-1), f(0), f(2), f(3), f(-2) et f(6)

3) Les antécédents de –1, 0, 1 et 2 par f

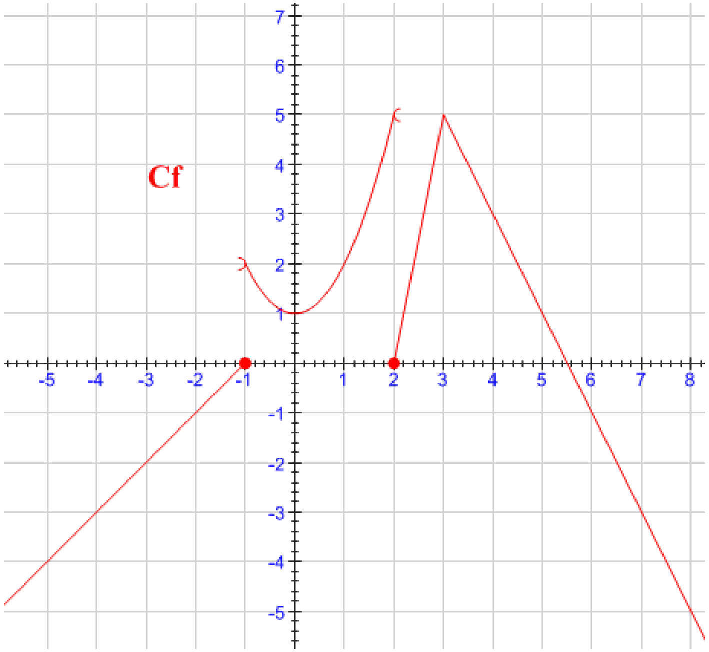
4) La valeur maximale de f

5) La valeur minimale de f sur]-1,2[

6) Le nombre de solutions de L'équation:

a) $f(x) = -3$ b) $f(x) = 2$

7) L'ensemble de solutions de l'inéquation: $f(x) \leq 0$



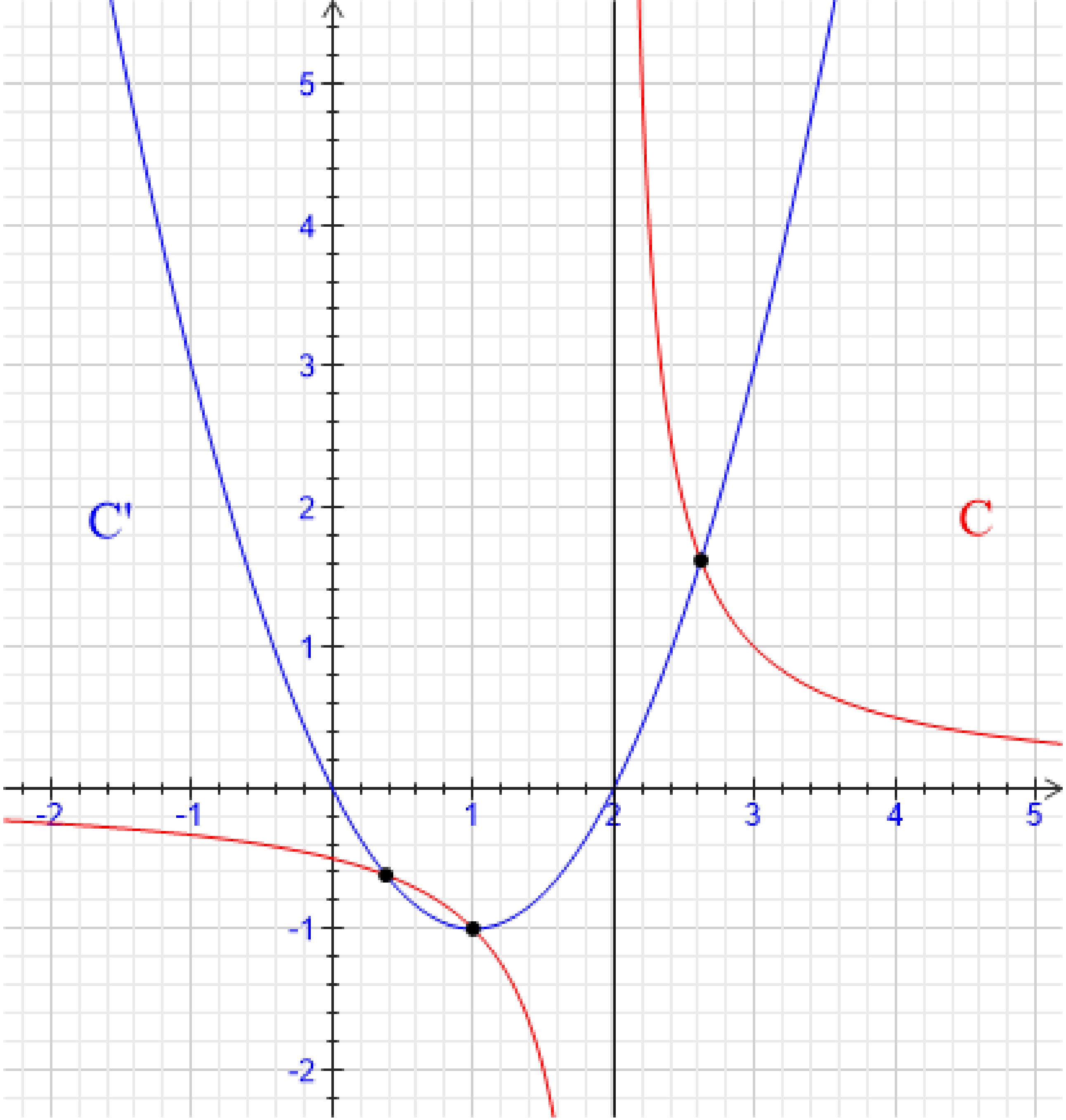
II. Rappels

1. Activité 3

1) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ représenter les courbes C et C' d'équations respectives: $y = \frac{1}{x-2}$ et $y = x^2 - 2x$

2) Déterminer graphiquement le nombre de points d'intersection de C et C'.

3) Déterminer, par leurs coordonnées, les points d'intersections de C et C'



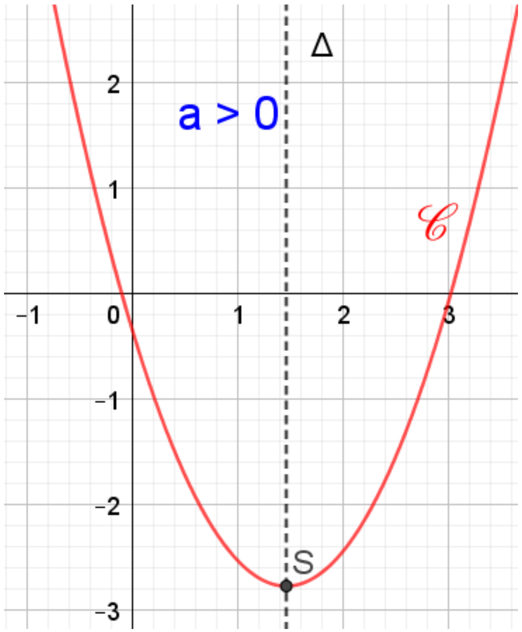
5
4
3
2
1
-1
-2
-2
-1
1
2
3
4
5
C'
C

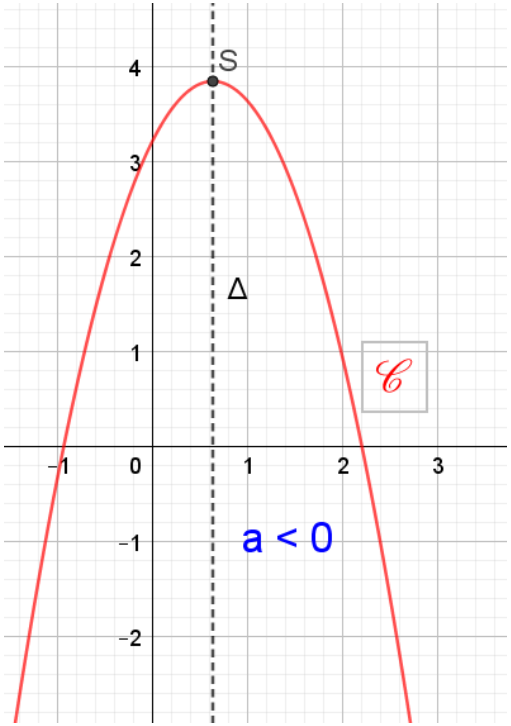
Cas général

La courbe représentative de la fonction définie par:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une parabole de sommet

$S(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$ et d'axe Δ: $x = \frac{-b}{2a}$



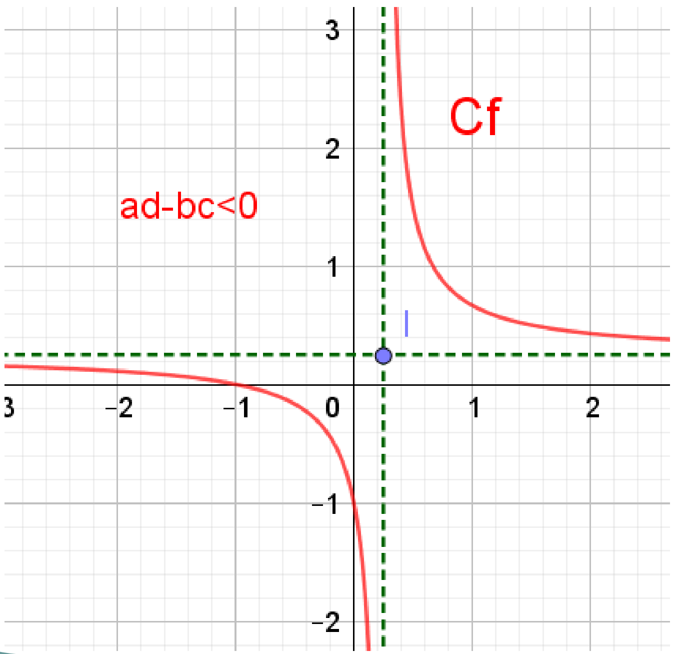


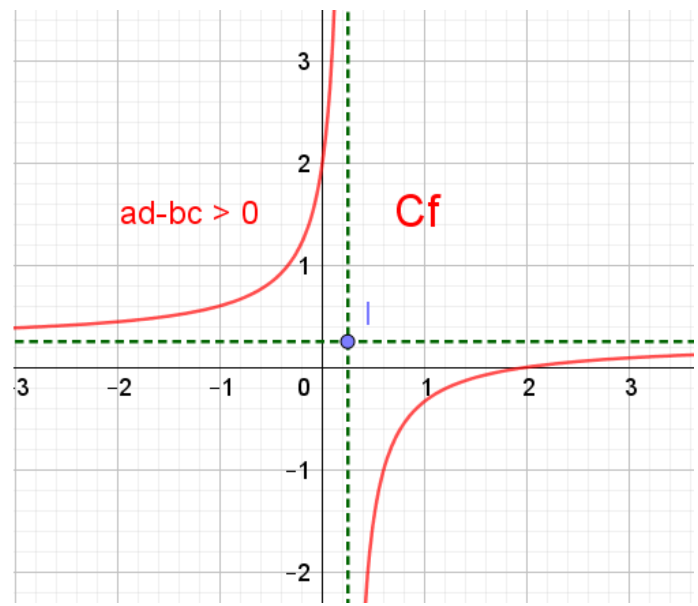
Cas général

La courbe représentative de la fonction définie par:

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$ est une hyperbole de centre

$I(\frac{-d}{c}, \frac{a}{c})$ et d'asymptotes Δ: $x = \frac{-d}{c}$ et Δ': $y = \frac{a}{c}$



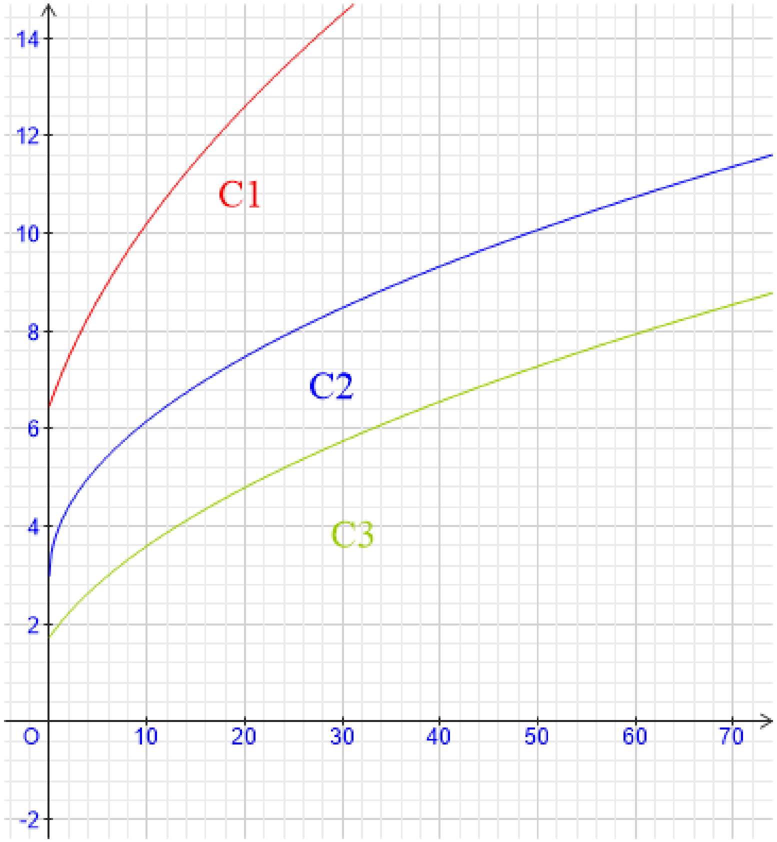


2. Activité 4 (N°2 page 7)

On a représenté dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes des fonctions f, g et h définies sur $[0, +\infty[$ par:

$f(x) = \sqrt{x+3}$, $g(x) = \sqrt{x} + 3$ et $h(x) = 2\sqrt{x+3} + 3$

Identifier chacune d'entre-elles.

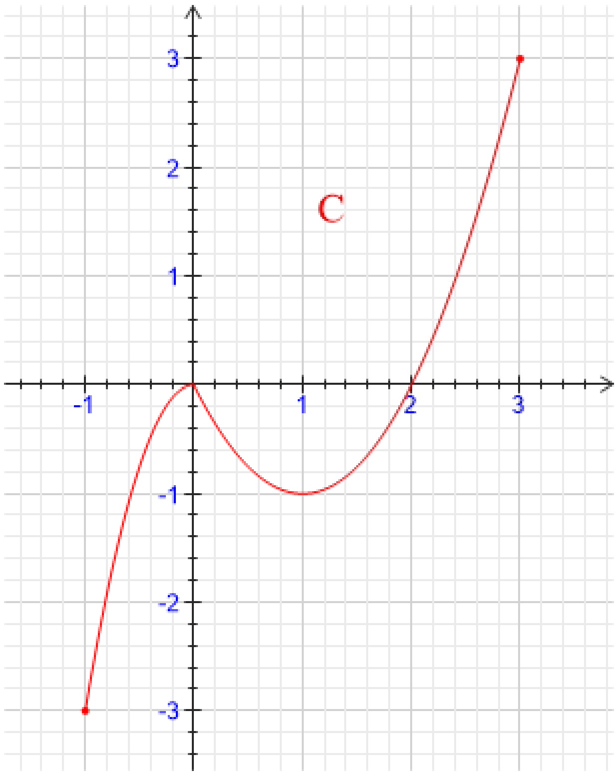


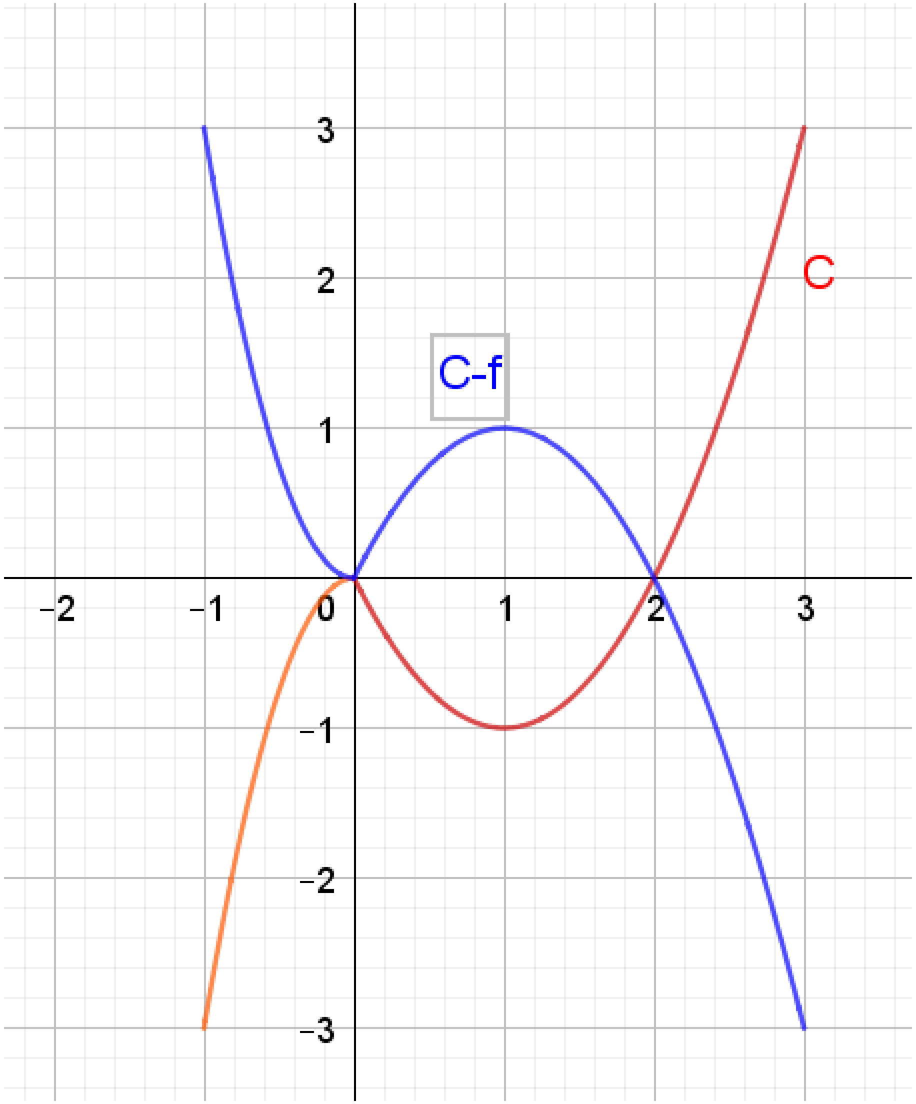
1. Sens de variation d’une fonction

Activité 5 (N°1 page 7)

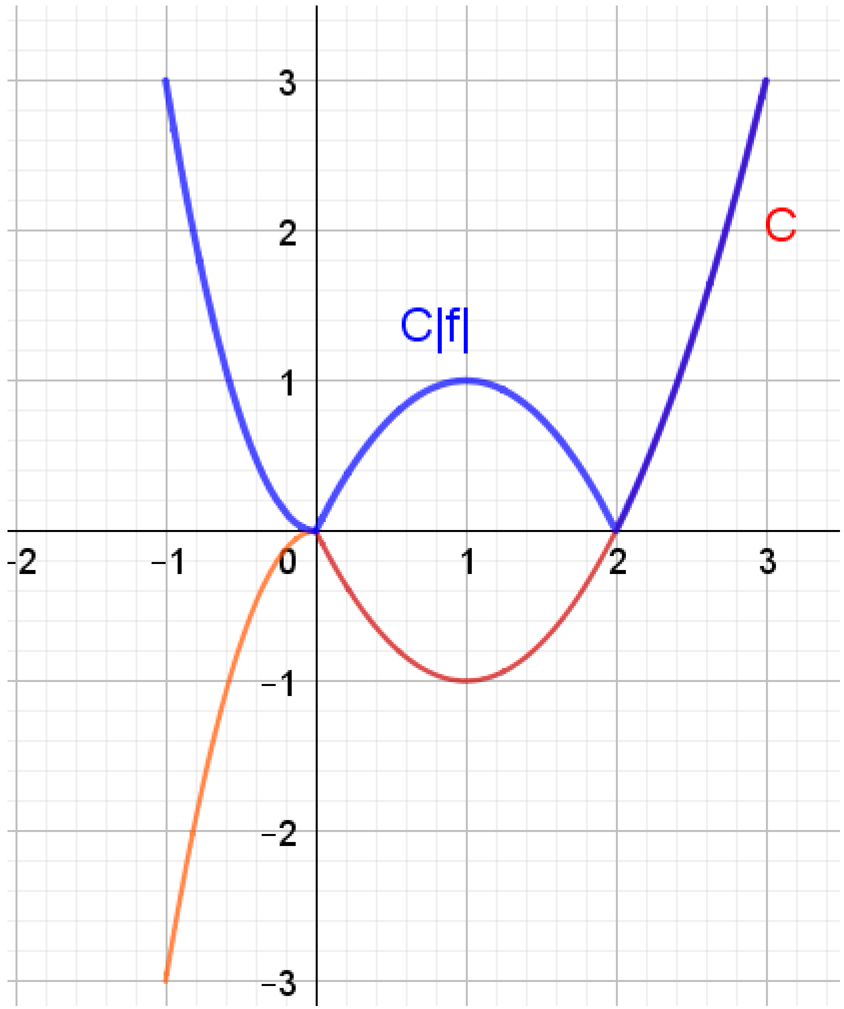
Le plan est muni d’un repère orthogonal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).
La courbe C tracée ci-contre, est la représentation graphique d’une fonction f définie sur [-1,3].

1. Lire graphiquement les variations de la fonction f.
2. Construire les courbes représentatives des fonctions: -f , |f| , 2f .
   Expliquer le procédé de construction.
3. Lire graphiquement les variations de chacune des fonctions –f, |f| et 2f

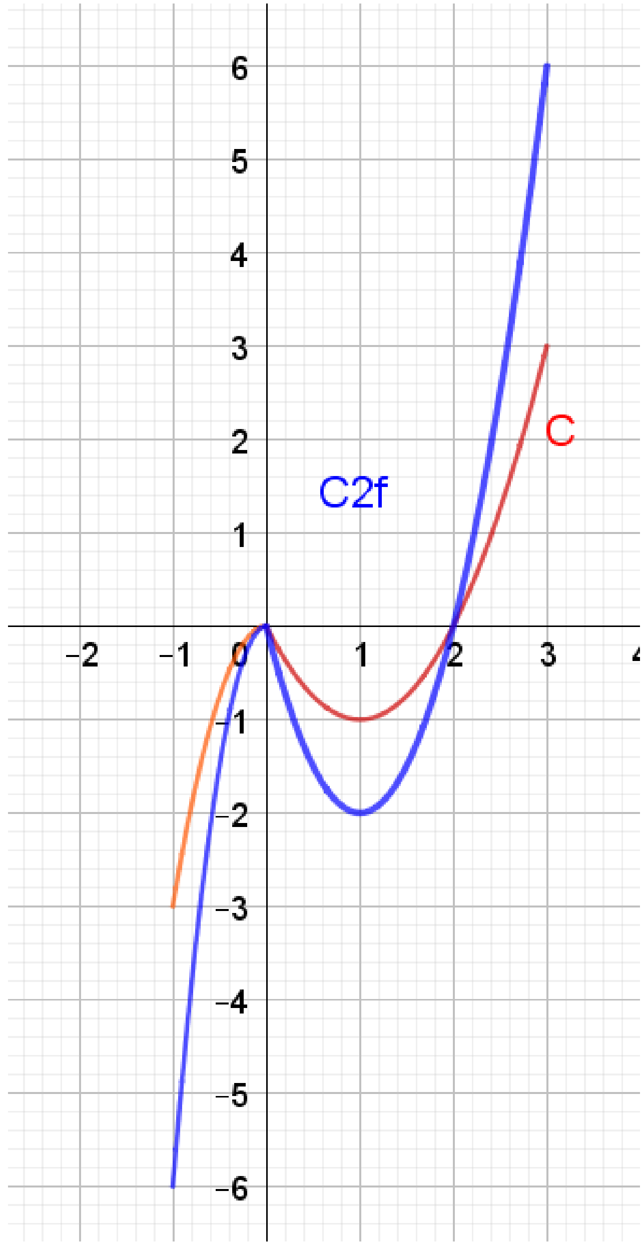




C
C-f
3
2
1
0
−1
−2
−3
−2
−1
1
2
3

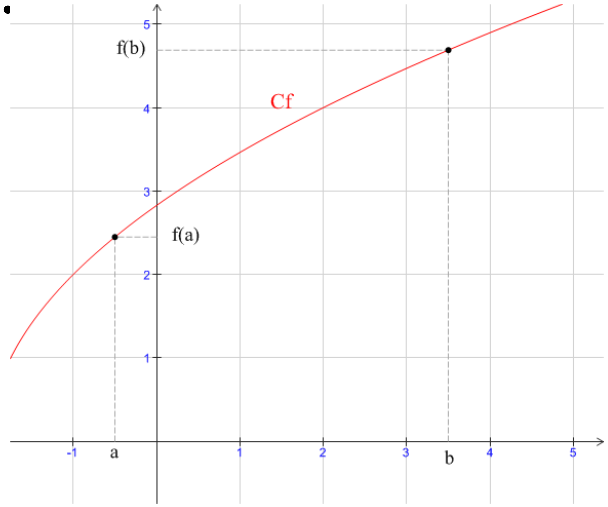


C|f|
C

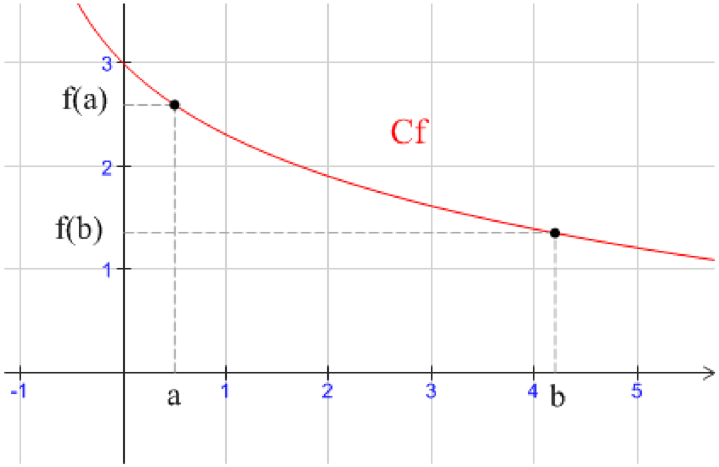

C2f
C
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−2
−1
0
1
2
3

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

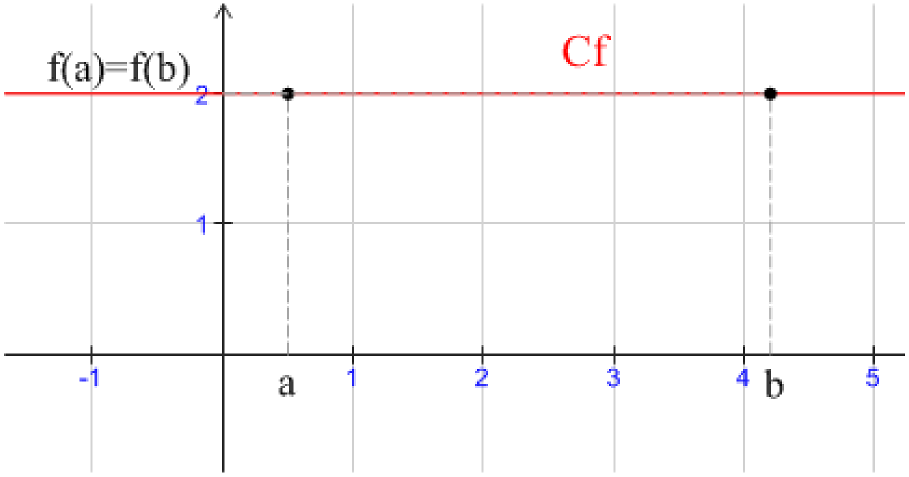


- La fonction f est **croissante** sur I si pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, $f(a) \leq f(b)$.



- La fonction f est **décroissante** sur I si pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, $f(a) \geq f(b)$.

- La fonction f est **constante** sur I si pour tous réels a et b de I, $f(a) = f(b)$.



- Une fonction est dite **monotone** sur un intervalle I lorsqu'elle est croissante ou décroissante sur I.

Activité 6

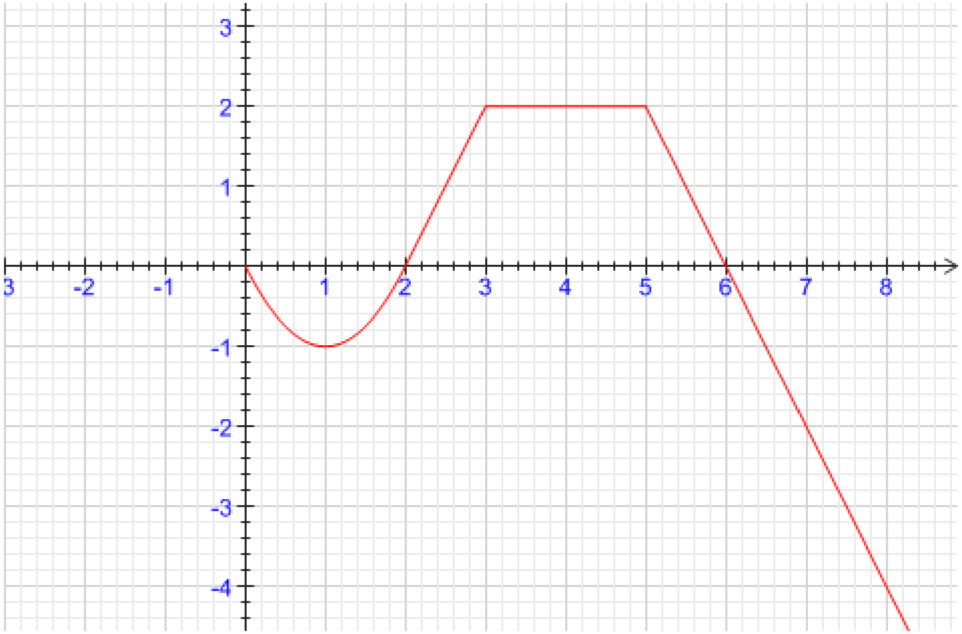
Le plan est muni d’un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Sur la figure ci-dessous on a tracé la partie de la courbe d’une fonction f, définie sur IR, relative à $[0, +\infty[$.

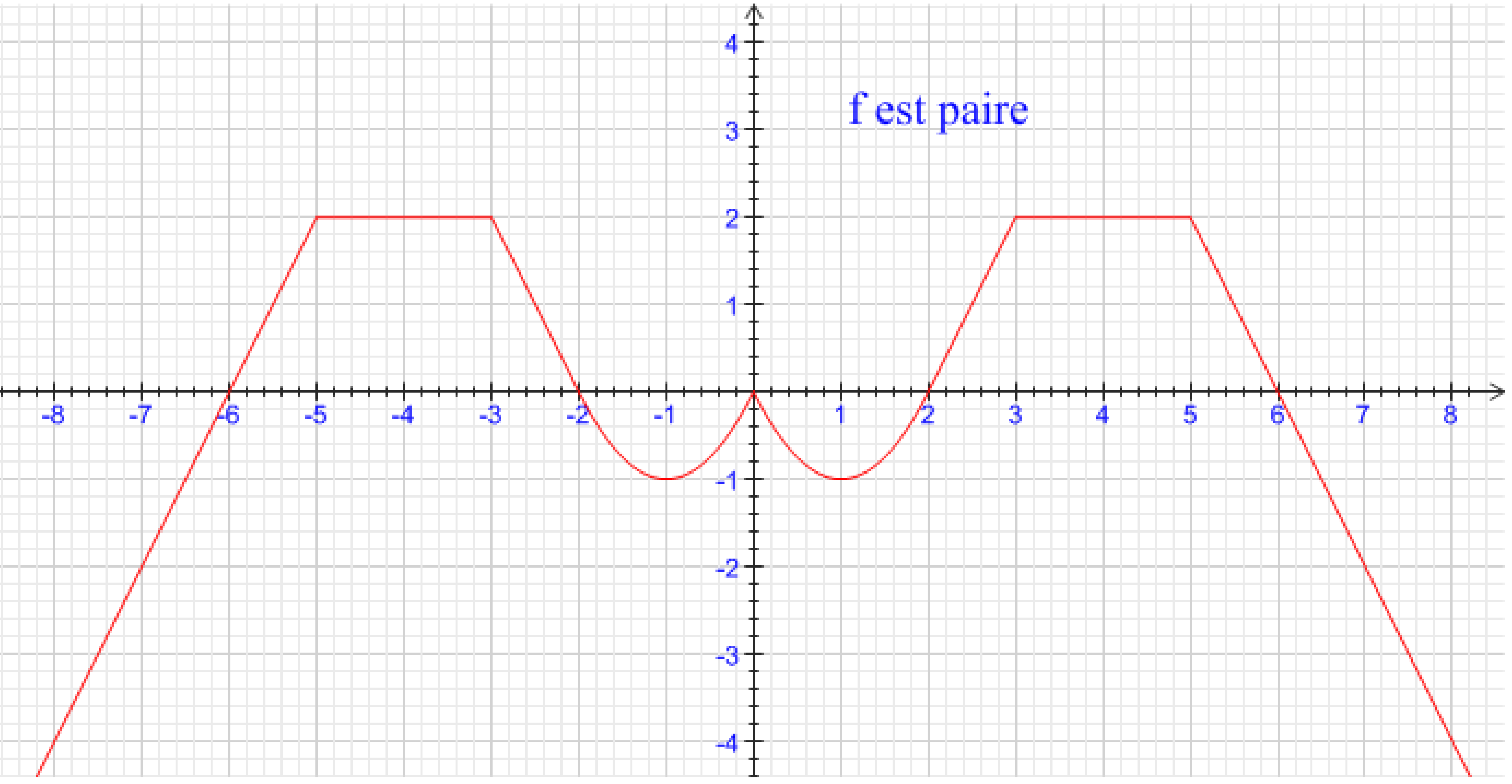
1) Achever la courbe de f puis dresser son tableau de variation dans chacun des cas suivant:

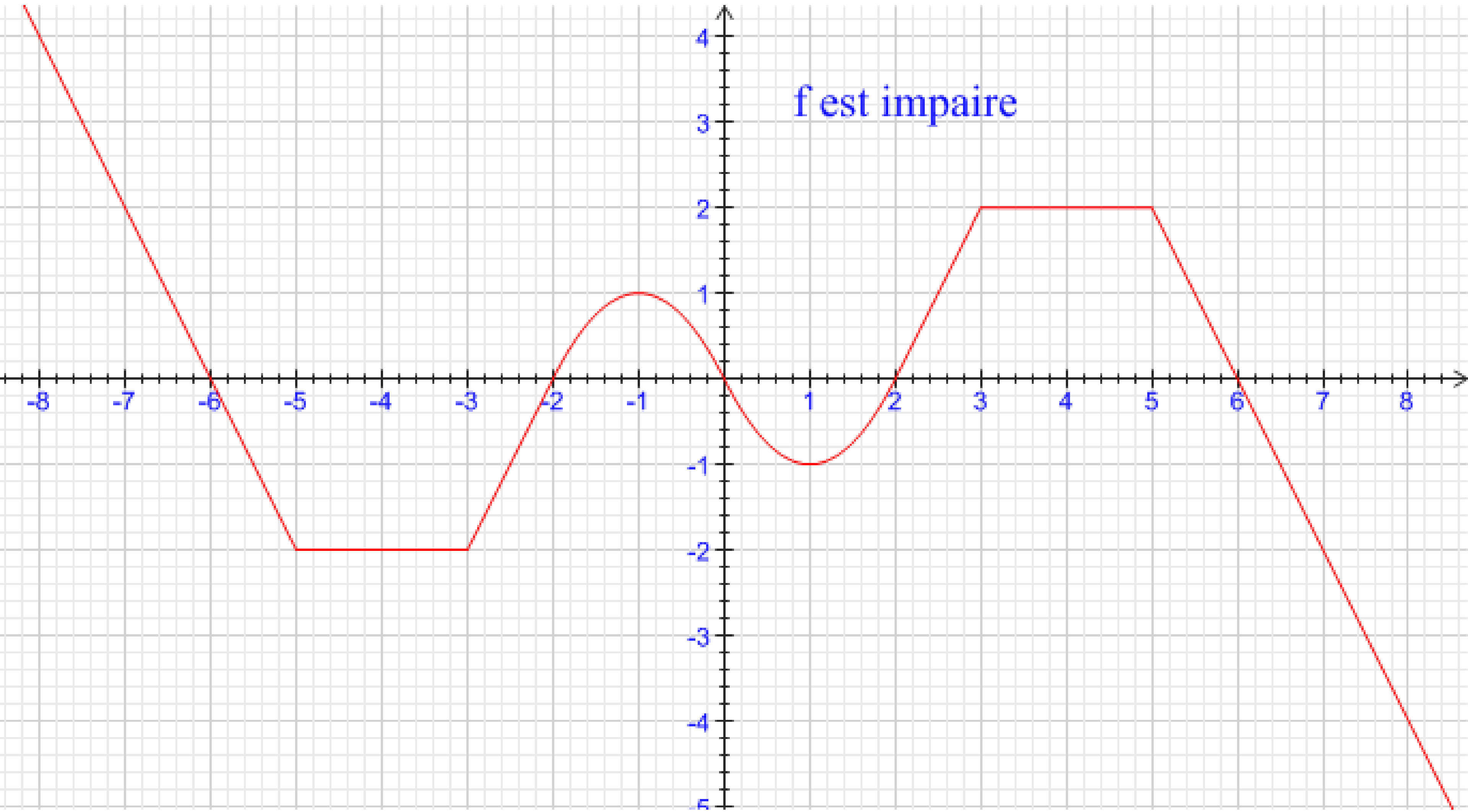
a) f est paire.

b) f est impaire.

2) Déterminer l’expression de f(x) sur chacun des intervalles: [0,2]; [2,3] ; [3,5] et $[5, +\infty[$




f est paire
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4



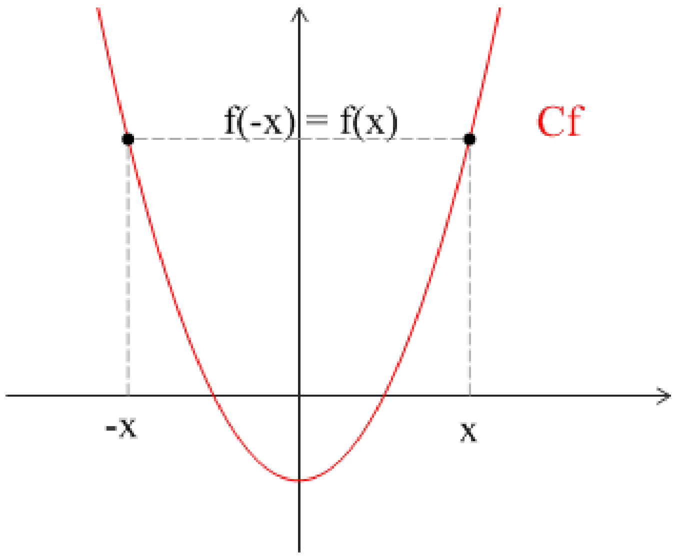
f est impaire
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

- On dit que f est une fonction **paire** ssi pour tout $x \in D$ on a: $-x \in D$ & $f(-x) = f(x)$
- La fonction f est paire ssi sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

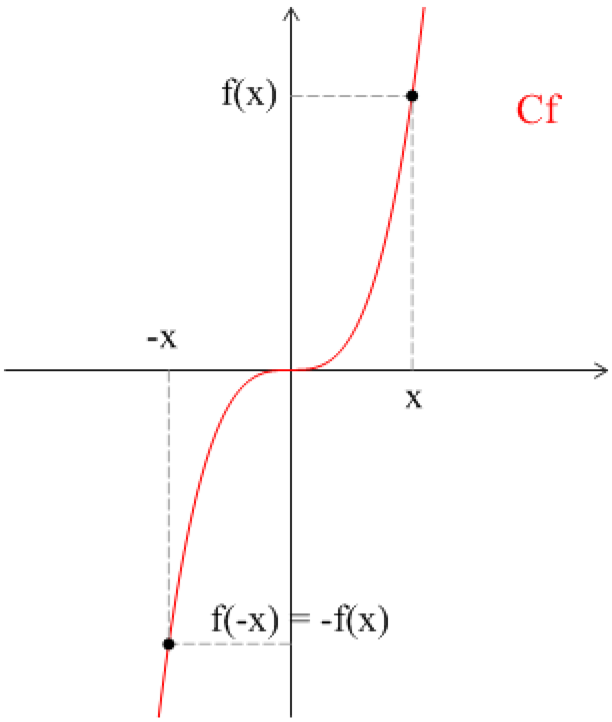


Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

- On dit que f est une fonction **impaire** ssi pour tout $x \in D$ on a: $-x \in D$ & $f(-x) = - f(x)$

- La fonction f est impaire ssi sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.



III. Restriction d’une fonction

1. Activité 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

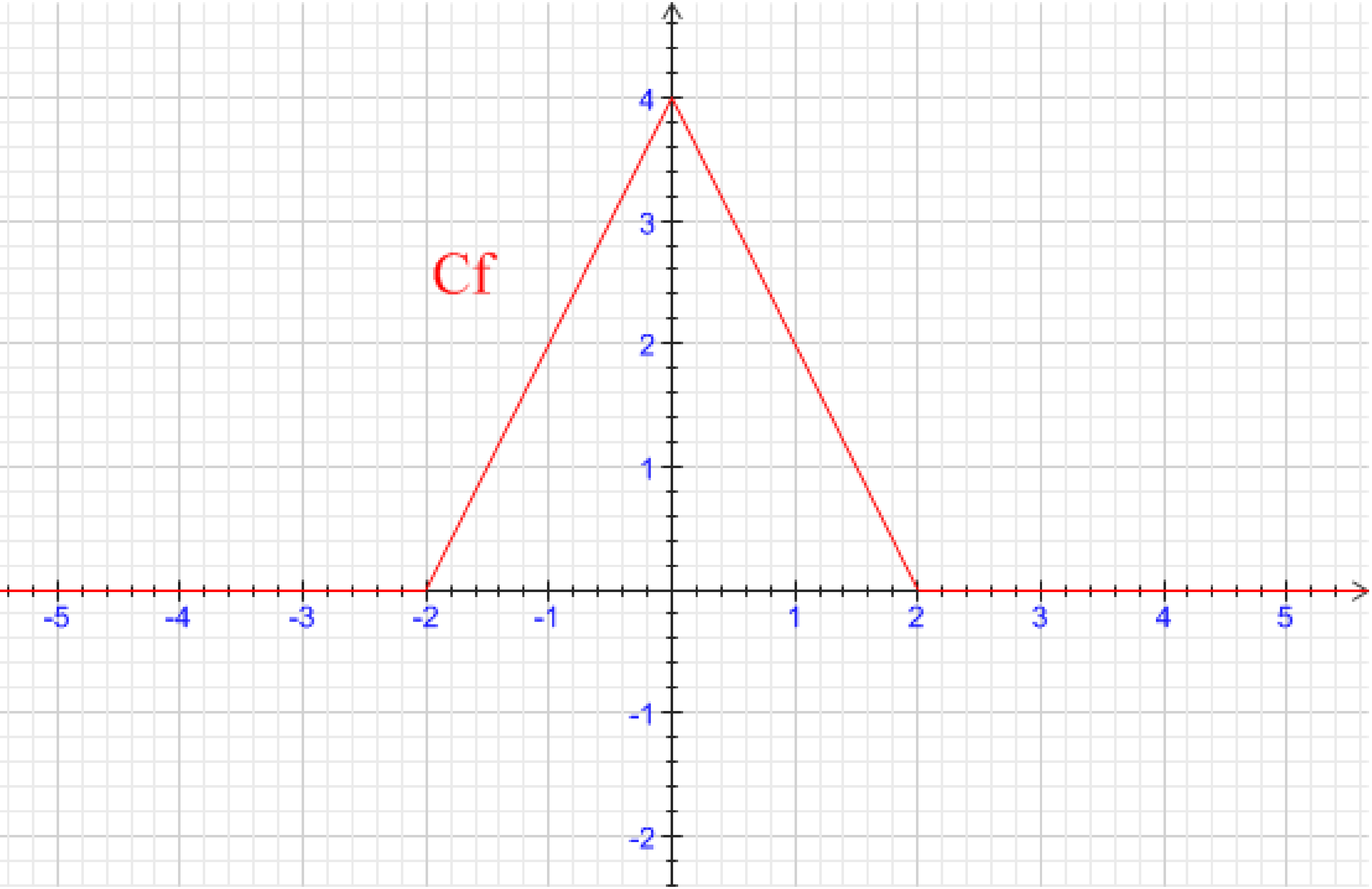
On considère la fonction f définie sur IR par:

$$f(x) = |x + 2| - 2|x| + |x - 2|$$

1) Déterminer l'expression de la fonction g définie sur $]-\infty, -2]$ par $g(x) = f(x)$.

La fonction g ainsi obtenue est appelée <u>restriction</u> de f à $]-\infty, -2]$.

2) Déterminer la restriction h de f à $[-2, 0]$
3) Déterminer la restriction k de f à $[0, 2]$
4) Déterminer la restriction l de f à $[2, +\infty[$
5) Tracer la courbe de f.



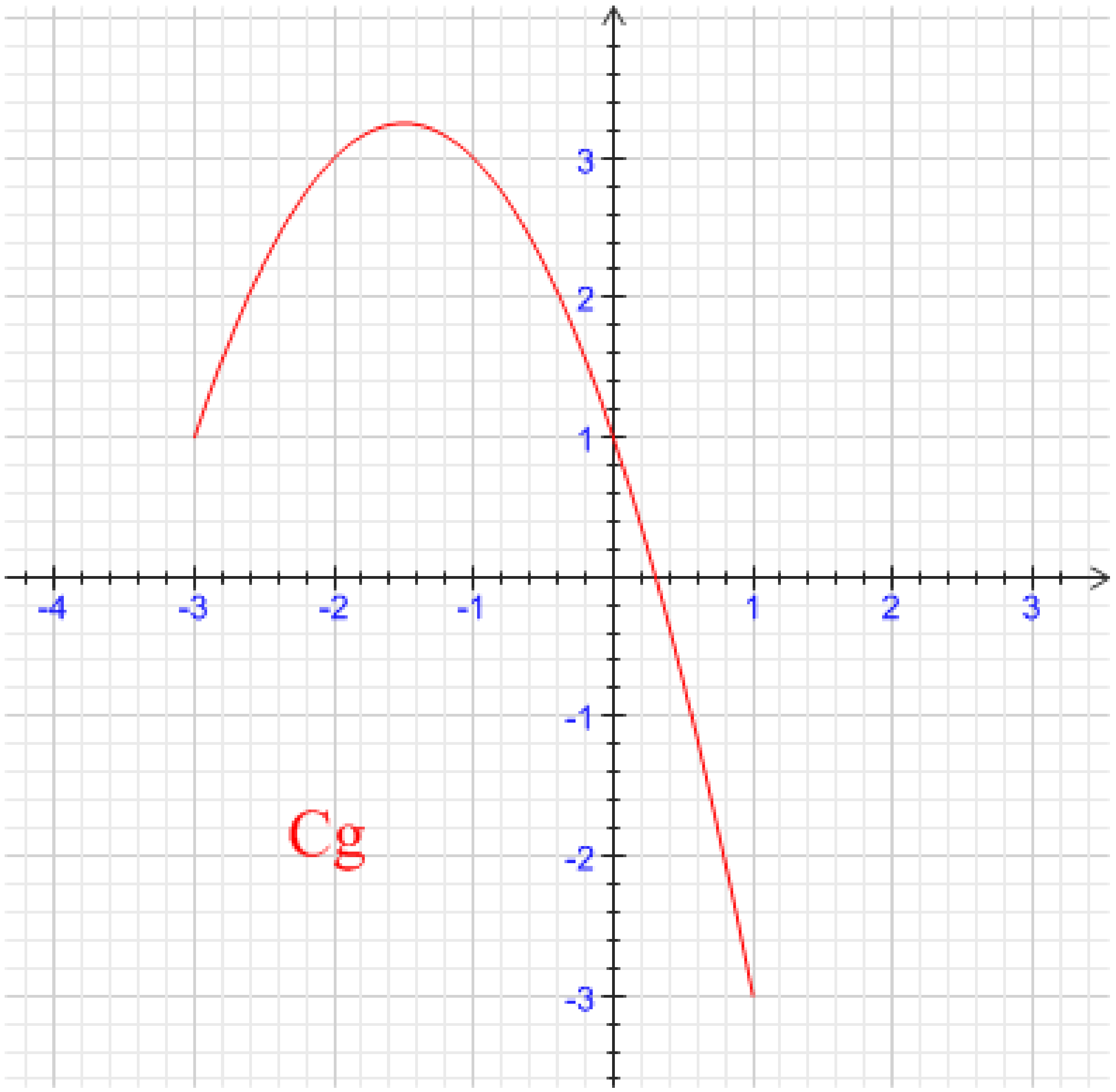
Cf
4
3
2
1
-1
-2
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5

Activité 8

On considère la fonction f définie sur IR par

$$\mathbf{f(x) = 2|x - 2| - |x + 3| - x^2.}$$

1. Donner l'expression de la fonction g, restriction de f a l'intervalle [- 3,1].
2. Représenter graphiquement g.



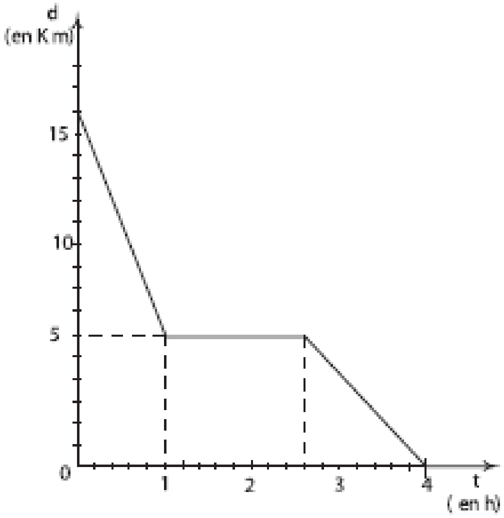
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
1
2
3
Cg

IV. Fonction affine par intervalles

Activité 9 (N°1 page 10)

Un cycliste se dirige de la ville B vers la ville A.
On désigne par d(t) la distance (en km) qui à l'instant t (en heure) le sépare de la ville A.
Soit d la fonction qui à t associe d(t).
Dans le graphique ci-contre, la courbe C est la représentation graphique de la fonction d.

1. Quelle est la distance qui sépare les deux villes ?
2. Au bout de combien de temps le cycliste arrivera-t-il à la ville A ?
3. Donner l'expression de d(t) pour tout $t \in [0, 4]$.



Définition

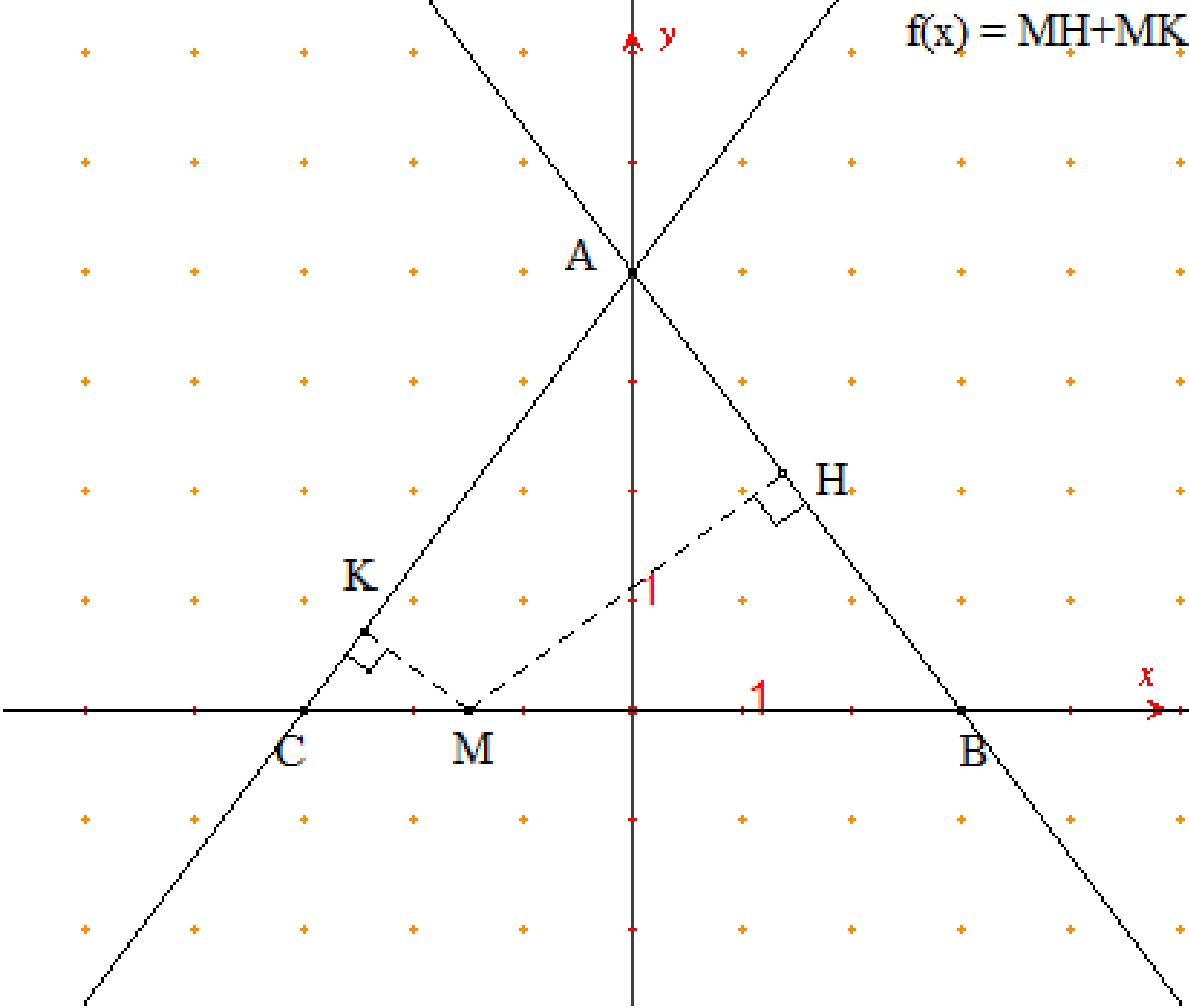
On appelle fonction affine par intervalles toute fonction définie sur une réunion d'intervalles et telle que sa restriction a chacun de ces intervalles soit affine.

Activité 10 (N°2 page 11)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points A(0, 4), B(3, 0), C(–3, 0) sont fixes et M est un point variable de la droite (BC), d'abscisse x.

On désigne par H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) et par K le projeté orthogonal de M sur la droite (AC).

1. On considère la fonction $f : x \rightarrow MH + MK$.
   Donner l'expression de f(x) pour tout réel x.
2. Montrer que la restriction de f à l'intervalle [–3,3] est une fonction constante.
3. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $MH + MK = 6$.
4. Existe-t-il des points M tels que $MH = MK$?


f(x) = MH+MK
y
A
H
K
1
1
x
C
M
B

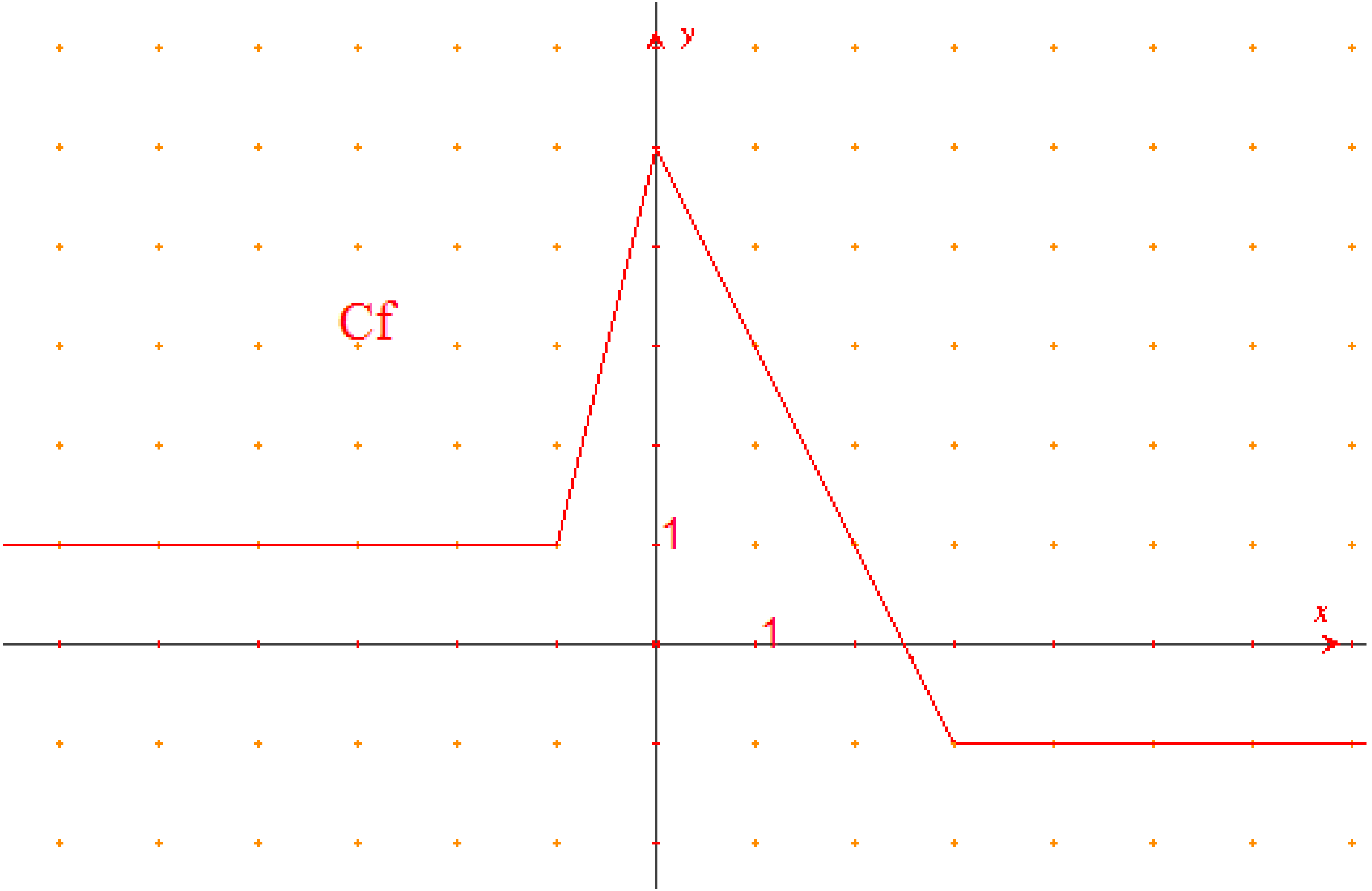
Application 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

On considère la fonction f définie sur IR par:

$$f(x) = 2\,|x + 1| - 3|x| + |x - 3|$$

1) Montrer que f est une fonction affine par intervalles.
2) Représenter graphiquement la fonction f.



y
Cf
1
1
x

V. Fonction partie entière

Définition

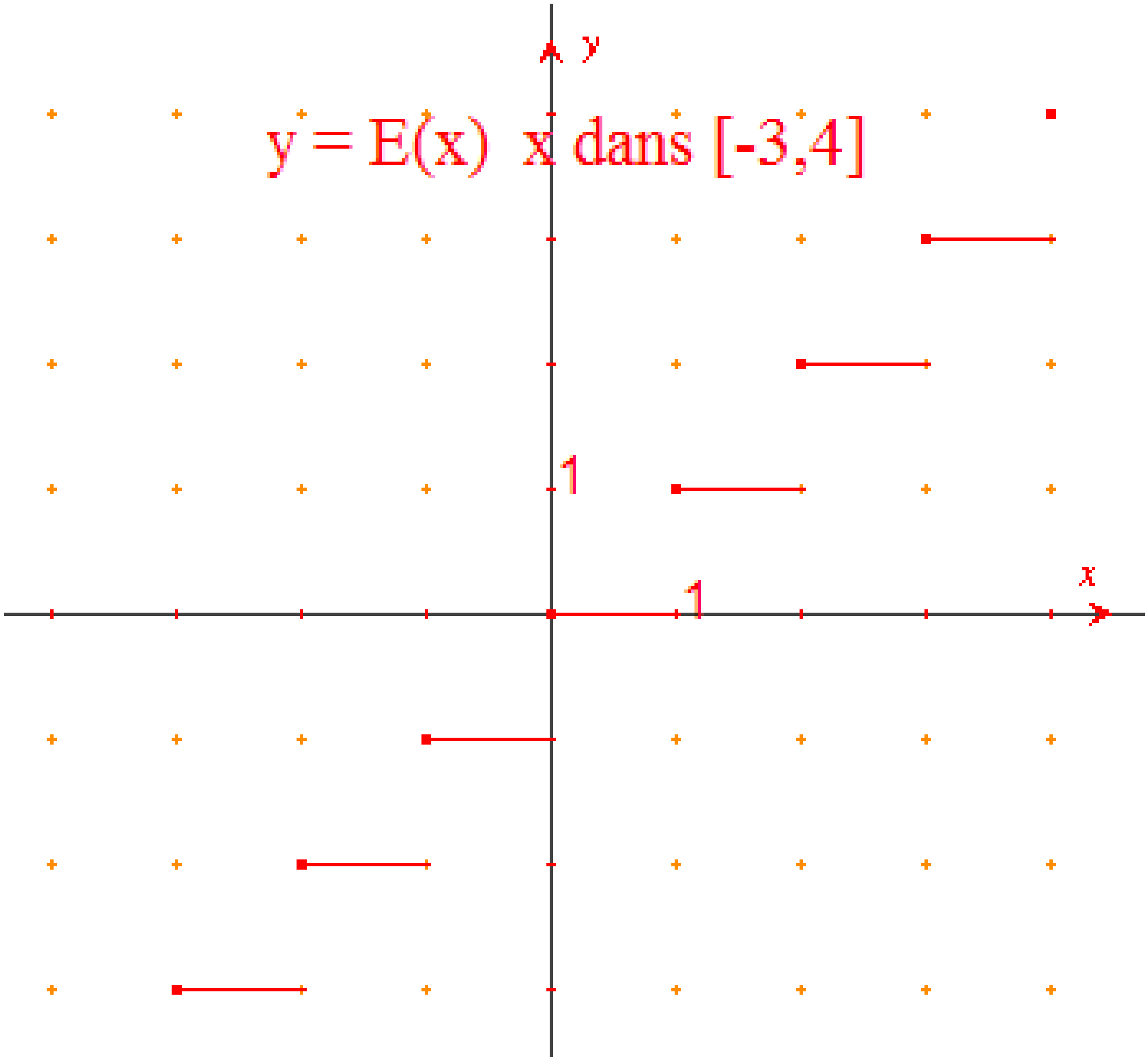
- On appelle partie entière d'un réel x et on note E(x), le plus grand entier inferieur ou égal à x.
- On appelle fonction partie entière la fonction qui à tout réel associe sa partie entière.
- Soit E la fonction partie entière.
  Pour tout réel x, il existe un entier n tel que $x \in [n, n+1[$.
  On a alors $E(x) = n$.
- Pour tout réel x, on a: $E(x) \leq x < E(x) + 1$

Application 2

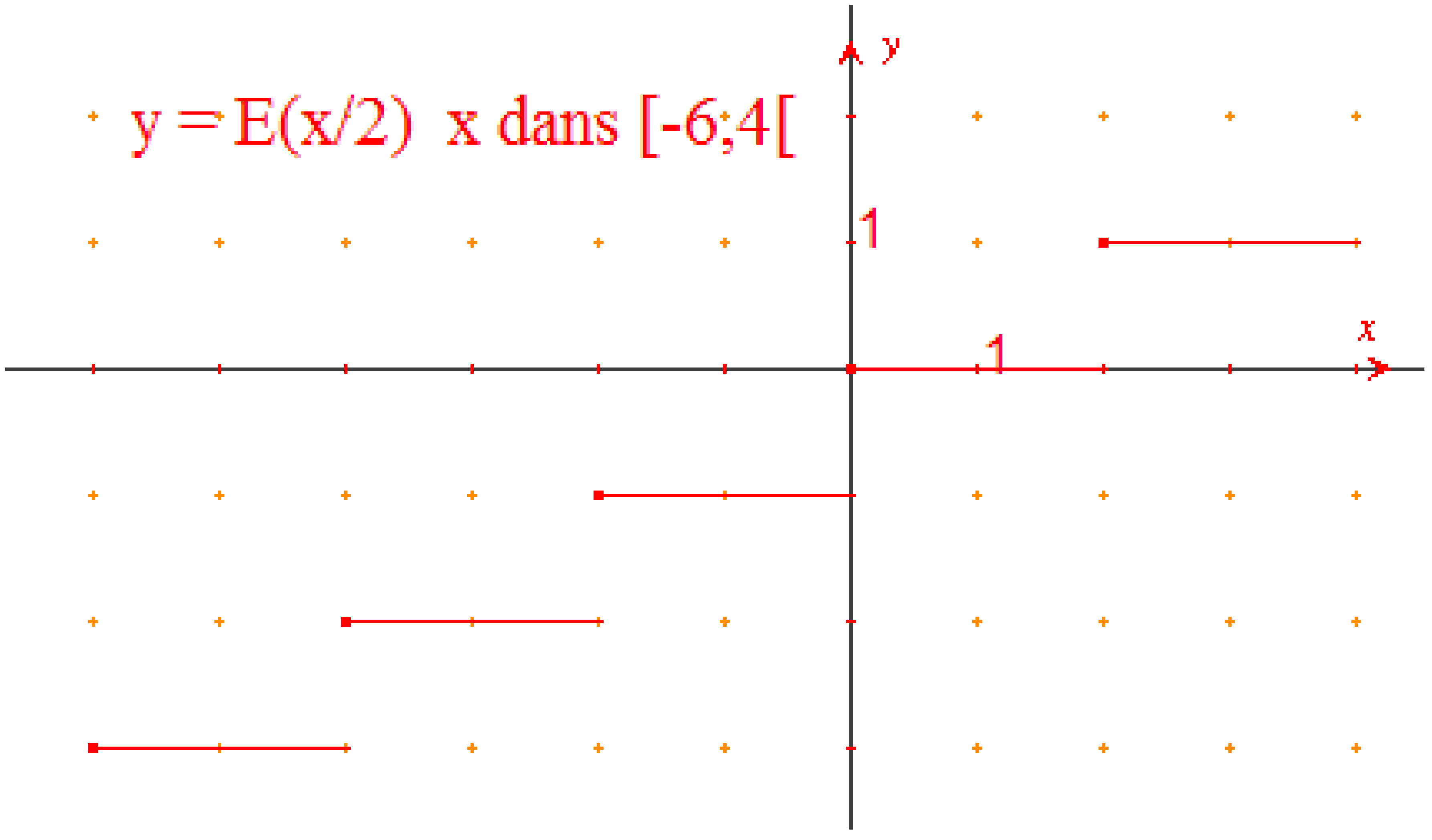
1. Déterminer: E(3); E(-3) ; E(4,2) ; E(-2,1) ; E(0) ;
   E($\frac{1}{2}$) ; $E\left(\frac{37}{11}\right)$; $E\left(\frac{-15}{3}\right)$; $E(\frac{2016}{37})$
2. Déterminer et représenter graphiquement la restriction de la fonction partie entière à l'intervalle [–3, 4].
3. Déterminer et représenter chacune des fonctions:

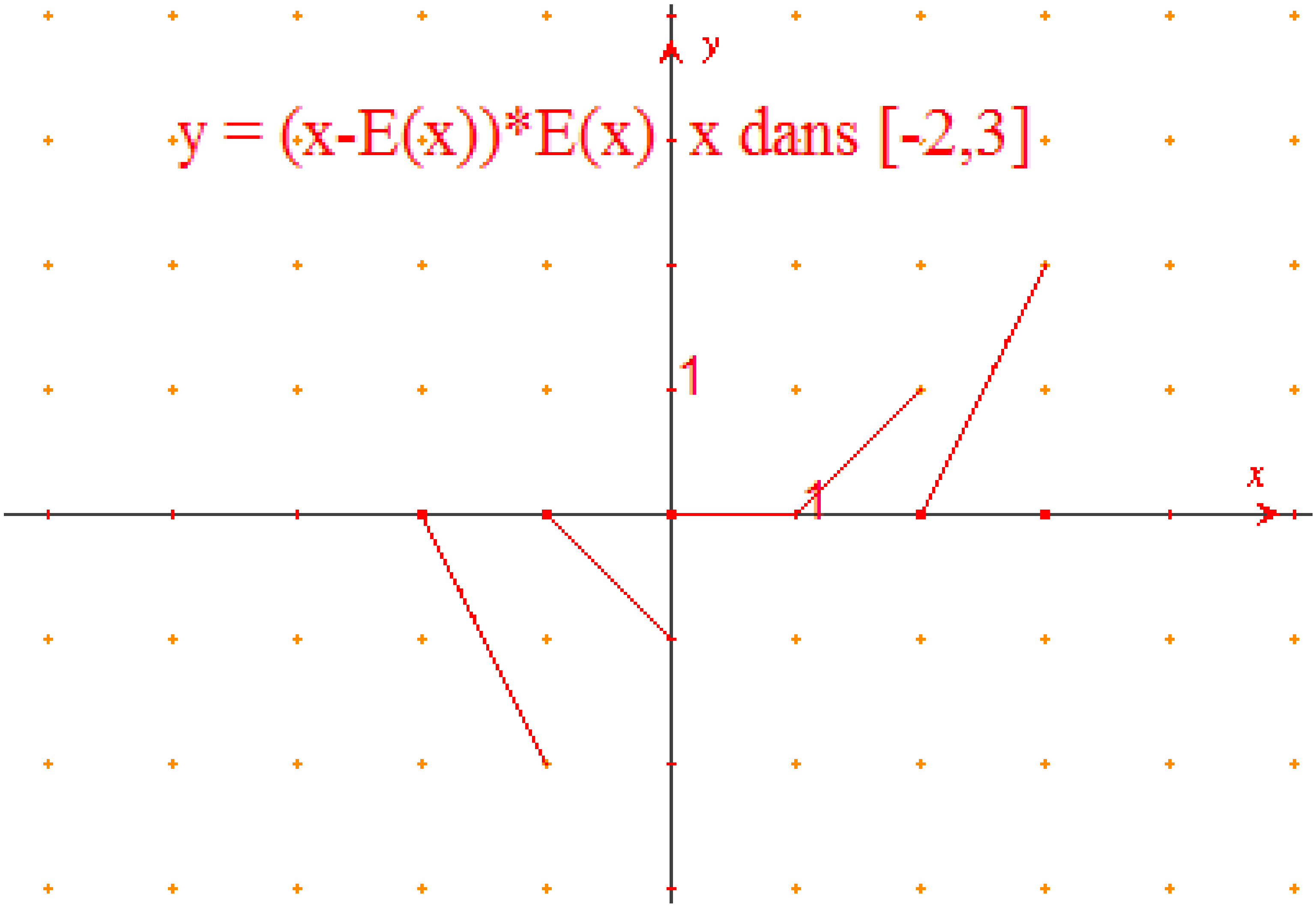
$$f: [-6, 4[\rightarrow IR \qquad x \rightarrow E\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$g: [-2, 3] \rightarrow IR \qquad x \rightarrow (x - E(x))E(x)$$



y = E(x) x dans [-3,4]
y
x
1
1

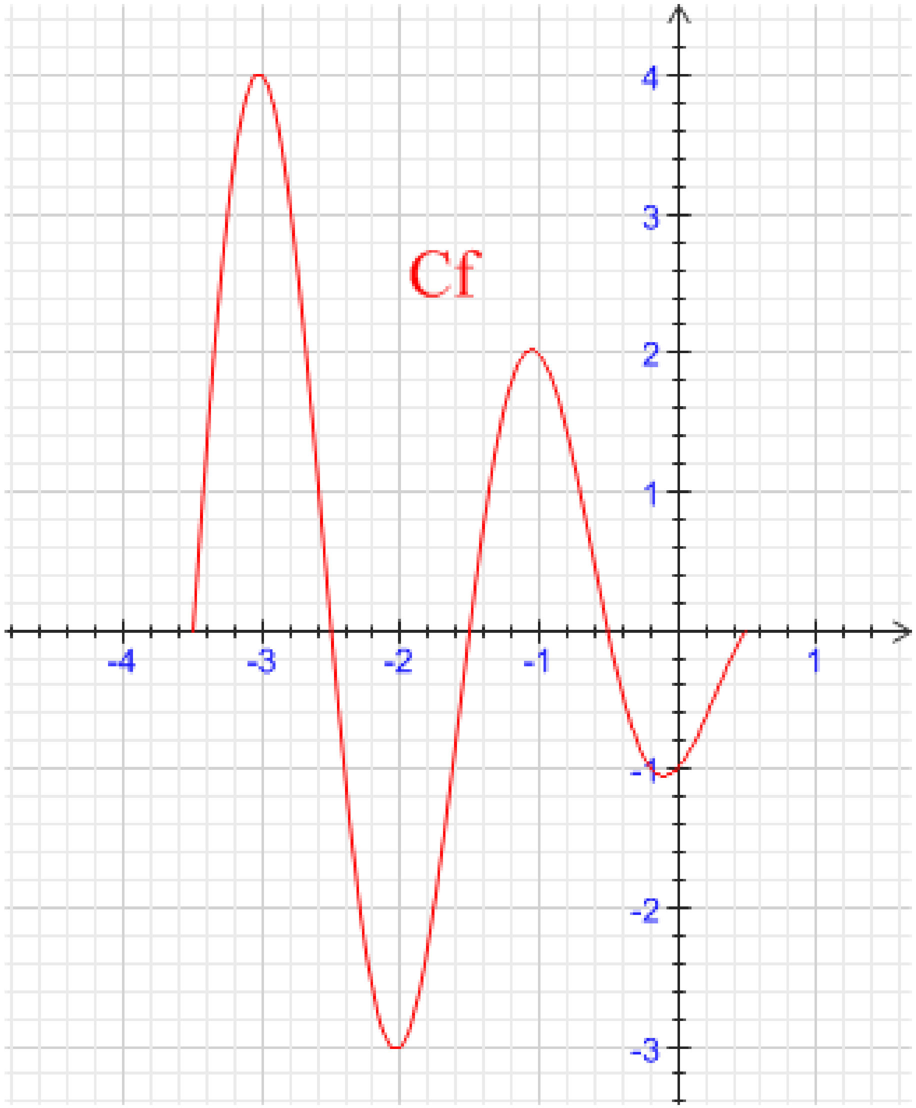

y = E(x/2) x dans [-6;4[
y
1
x
1


y = (x-E(x))*E(x) x dans [-2,3]
y
x
1
1

VI. Majorant – Minorant

Activité 11

Par lecture graphique, déterminer les extrèmas de f.



Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

- La fonction f est dite majorée sur D s'il existe un réel M tel que pour tout x de D, $f(x) \leq M$.
  Dans ce cas le réel M est dit majorant de f sur D.
- La fonction f est dite minorée sur D s'il existe un réel m tel que pour tout x de D, $f(x) \geq m$.
  Dans ce cas le réel m est dit minorant de f sur D.
- La fonction f est dite bornée sur D s'ils existent deux réels m et M tels que pour tout x de D, $m \leq f(x) \leq M$.
- f est bornée sur D ssi il existe un réel k strictement positif tel que pour tout x de D, $|f(x)| \leq k$.

Exercice N°4 page 16

1. Déterminer le minimum sur $\mathbb{R}$ des fonctions ci-dessous.

a. $f : x \mapsto 1 + |x| + 2x^2$.

b. $g : x \mapsto |x + 1| - 4$.

2. Déterminer le maximum sur $\mathbb{R}$ des fonctions ci-dessous

a. $h : x \mapsto \dfrac{1}{|x| + 3} + 1$.

b. $k : x \mapsto \dfrac{2}{1 + x^2} - 3$.

Exercice N°5 page 16

1. Donner les variations sur]0, 1[de la fonction

$$f : x \mapsto \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

2. En déduire celles de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2}{x^2 - x}$ sur]0, 1[.

3. Quel est le maximum de g sur]0, 1[?

Exercice N°6 page 16

1. Majorer et minorer sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

2. a. Montrer que pour tout réel x, $|2x| \leq x^2 + 1$.

b. Majorer et minorer sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x}{x^2+1}$

Exercice N°7 page 16

1. Majorer et minorer sur $[0, +\infty[$ la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1+\sqrt{x}} - 2\,.$$

2. Majorer et minorer sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1+(2+x)^2} + 1\,.$$

3. Majorer et minorer sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$x \mapsto \frac{2}{1+\frac{1}{2+x^2}}\,.$$

Exercice N°9 page 16

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Tracer la représentation graphique d'une fonction f qui a les caractéristiques suivantes

- la fonction f est définie sur $[-4, 4]$,
- la fonction f est paire,
- $f(0) = 1$,
- la fonction f est majorée par 5 sur $[-4, 4]$,
- la fonction f est croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1, 4]$,
- la restriction de f à $[-4, 0]$ admet un minimum égal à -3.

A-t-on une unique fonction qui vérifie ces conditions ?