Fonction réciproque d’une fonction strictement monotone

Cours élaboré par le prof: Chouihi

Activité

Soit f la fonction définie sur IR_+ par $f(x) = 2x^2 - 1$

1) Déterminer $f < IR_+ >$.

2) Soit $y \in [-1,+\infty[$; résoudre dans IR_+, l'équation: $f(x) = y$

3) On pose $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$

Déterminer $\begin{cases} gof(x) \\ x \in IR+ \end{cases}$ *et* $\begin{cases} fog(x) \\ x \in [-1,+\infty[\end{cases}$

Commentaire

On a ainsi prouvé que pour tout $y \in [-1, +\infty[$ il existe $x \in IR+$ Unique tel que $f(x) = y$,

On dit que f réalise une **bijection** de IR+ vers $[-1, +\infty[$.

La fonction réciproque de f est notée f^{-1} et elle est définie sur

$[-1, +\infty[$ par $\mathbf{f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}}$

Définition

Soit f une application de I dans J
f est dite bijective ssi pour tout $y \in J$, il existe $x \in I$ unique tel que $f(x) = y$.
Autrement dit: pour tout $y \in J$, l'équation: $f(x) = y$ admet une unique solution $x \in I$.
Dans ce cas l'application réciproque de f est notée f^{-1} et on a: pour tous $x \in I$ et $y \in J$

$$\mathbf{f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x}$$

Pour tout $x \in I$, $f^{-1} o f(x) = x$
Pour tout $x \in J$, $f o f^{-1}(x) = x$

Théorème

Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur f < I >

Application

1/ On pose $f(x) = x^2 + 2x - 5$

a/ Dresser le tableau de variation de f.

b/ En déduire que f réalise une bijection de $I =]-\infty, -1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c/ Expliciter $f^{-1}(x)$, $x \in J$.

2/ Reprendre les questions de 1/ avec $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ et $I = [1, +\infty[$

3/ Reprendre les questions de 1/ avec $f(x) = \frac{2x^2+7x+2}{x+3}$ et $I =]-\infty, -3[$

4/ Reprendre les questions de 1/ avec $f(x) = x + \sqrt{x - 2}$ et $I = [2, +\infty[$

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est strictement monotone sur I alors les assértions suivantes sont validées:

a) f réalise une bijection de I sur f < I >.
b) La fonction réciproque de f est strictement monotone sur f < I > et a le même sens de variation que celui de f.
c) Dans un repère orthonormé, les courbes C_f et C_{f-1} sont symétriques par rapport à la $1^{ère}$ bissectrice.
d) Si en plus f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur f < I >.

Activité

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
On pose $y_0 = f(x_0)$
Etudier la dérivabilité de f^{-1} en y_0 .

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I .

$$Si \begin{cases} \text{f est dérivable sur I} \\ \text{pour tout } x \in I, f'(x) \neq 0 \end{cases}$$

Alors f^{-1} est dérivable sur f < I > et pour tout $x \in f<I>$

$$\mathbf{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Ou encore: $\mathbf{(f^{-1})' = \frac{1}{f' o f^{-1}}}$

Application1

Soit f : $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$

$x \rightarrow sinx$

1) Montrer que f est bijective.
2) Calculer $f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$, $f^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})$, $f^{-1}(\frac{1}{2})$
3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur]-1,1[et calculer $(f^{-1})'(x)$ pour x de]-1,1[.

4) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $f^{-1}(x) + f^{-1}(-x) = 0$

Application2

Soit f : $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

$x \rightarrow \cos x$

1) Montrer que f est bijective.
2) Calculer $f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$, $f^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$, $f^{-1}(\frac{-1}{2})$
3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur]-1,1[et calculer $(f^{-1})'(x)$ pour x de]-1,1[.

4) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $f^{-1}(x) + f^{-1}(-x) = \pi$

Application

Soit f : $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow$ IR

$x \rightarrow tanx$

1) Montrer que f est bijective.
2) Calculer $f^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})$, $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(0)$
3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur IR et calculer $(f^{-1})'(x)$ pour x de IR .

4) Montrer que pour tout $x > 0$, $f^{-1}(x) + f^{-1}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$

Fonction racine $n^{\text{ème}}$

Activité

Soit n un entier naturel ≥ 2 et f la fonction de IR_+ vers IR_+ définie par $f(x) = x^n$.

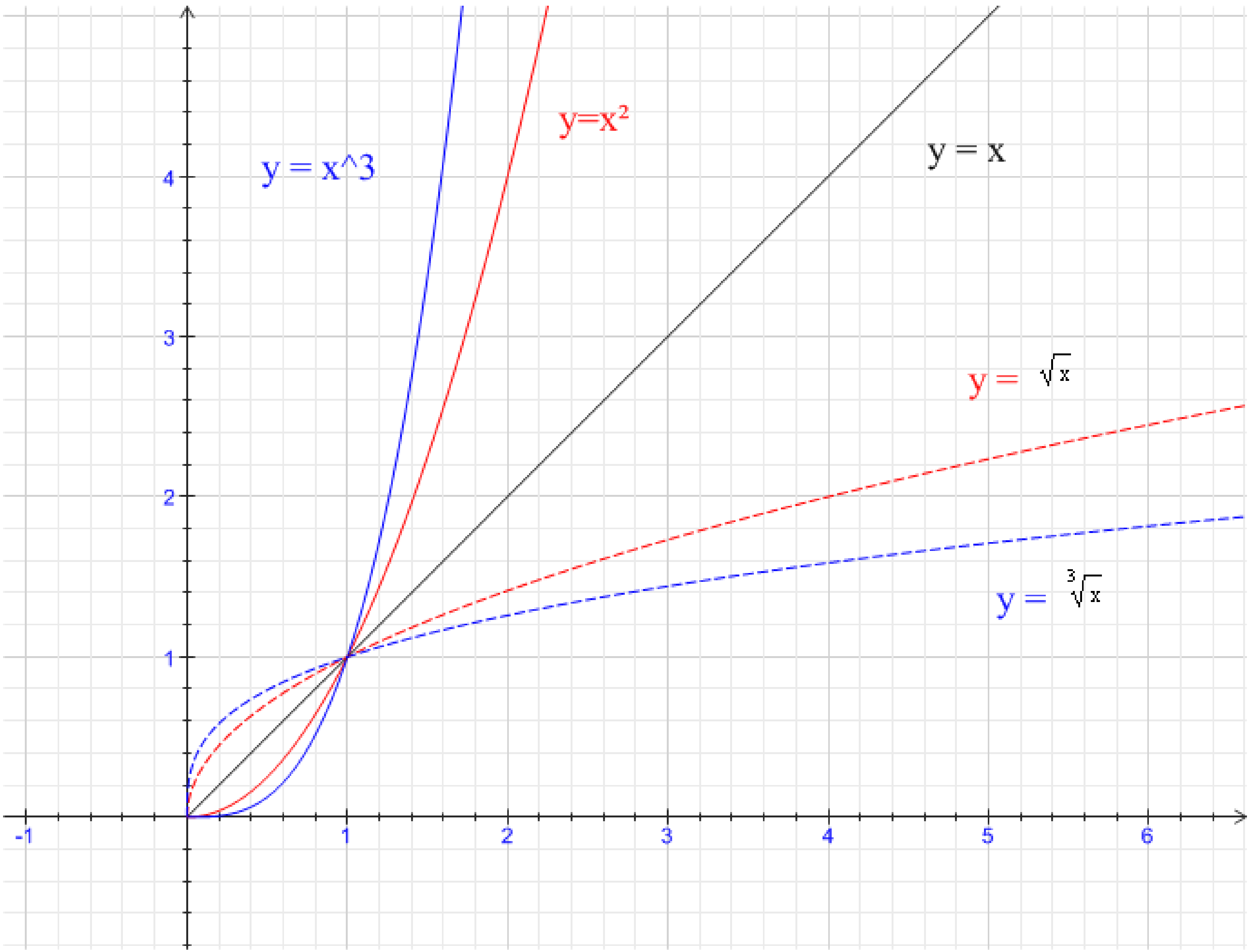
1) Dresser le tableau de variation de f.

2) En déduire que f est bijective.

3) On désigne par g la fonction réciproque de f.

a) Déterminer le sens de variation de g ainsi que sa limite en $+\infty$

b) Tracer, dans le même repère orthonormé, les courbes de f et de g pour $n = 2$ puis pour $n = 3$



y = x^3
y=x²
y = x
y = √x
y = ∛x
4
3
2
1
-1
1
2
3
4
5
6

Définition

Soit $n \in IN$, $n \geq 2$.

On appelle fonction racine nème la fonction réciproque de la fonction définie sur IR_+ par $f(x) = x^n$.

L'image d'un réel positif x par cette fonction est notée: $\sqrt[n]{x}$

Ainsi: pour tous réels positifs x et y on a:

$$y = \sqrt[n]{x} \quad \text{signifie} \quad x = y^n$$

Application

$$\sqrt[3]{8} = ... \quad \text{car} \quad ....$$

$$\sqrt[4]{81} = ... \quad \text{car} \quad ....$$

$$\sqrt[8]{16} = ... \quad \text{car} \quad ....$$

$$(-2)^3 = ... \text{ donc } \sqrt[3]{-8} = ???$$

Propriétés

Soit deux entiers n et p tels que $n \geq 2$ et $p \geq 2$ et deux réels positifs a et b. Alors

$\sqrt[n]{a^n} = a$. $\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. $\quad \sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$. $\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$.

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$. $\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$. $\quad \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$.

Justifier ces propriétés

<u>Application:</u> Simplifier

$$\sqrt[6]{64}, \quad \sqrt[6]{2^{-12}}, \quad \sqrt{\sqrt[3]{729}}, \quad \sqrt[3]{2^6.3^3}, \quad \frac{\sqrt[8]{16}}{\sqrt[8]{81}}, \quad \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$$

Exercice

Résoudre dans IR les équations:

1/ $\sqrt[3]{\mathbf{x}-\sqrt{\mathbf{x}}+\mathbf{1}}=\sqrt{\mathbf{x}}$

2/ $\sqrt[3]{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^2}+\mathbf{4}\sqrt[3]{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^2}=\mathbf{4}\sqrt[3]{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^2}$

Activité

On pose $f(x) = x^n$ **et** $g(x) = \sqrt[n]{x}$ $, n \geq 2$

Montrer que g **est dérivable sur** $]0, +\infty[$

et expliciter $g'(x)$.

Théorème

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$

La fonction g définie par $g(x) = \sqrt[n]{x}$

est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable

sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \succ 0$ on a :

$$g'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x^{n-1}})}$$

Puissance rationnelle

Activité

1) Calculer puis comparer : $\sqrt[3]{8^2}$ et $\sqrt[6]{8^4}$

2) Soit $r \in \mathbb{Q}$, on pose $r = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers tel que $q \geq 2$.

On se propose de montrer que le réel $\sqrt[q]{x^p}$ ne dépend pas du choix de p et q pour tout réel positif x.

on suppose que $r = \dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{q'}$ avec $q \geq 2$ et $q' \geq 2$.

$$(\sqrt[q]{x^p})^{qq'} = x^{pq'} = x^{qp'} = (\sqrt[q']{x^{p'}})^{qq'}$$

d'où $\sqrt[q]{x^p} = \sqrt[q']{x^{p'}}$

Définition

Pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

on défini x^r par $x^r = \sqrt[q]{x^p}$ où $r = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et

$q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$

<u>Application:</u> Calculer

$$27^{\frac{2}{3}} \;,\; 625^{\frac{-3}{4}} \;,\; 32^{\frac{4}{5}} \;,\; 1024^{\frac{-3}{10}}$$

Propriétés

Pour tous $r, r' \in \mathbb{Q}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+$ on a:

- $x^r . x^{r'} = x^{r+r'}$
- $(x^r)^{r'} = x^{rr'}$
- $x^{-r} = 1/x^r$
- $x^r / x^{r'} = x^{r-r'}$

- $x^r . y^r = (xy)^r$
- $x^r / y^r = (x/y)^r$

Théorème

La fonction: $x \to x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$) est définie et continue sur IR+ et elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$ on a:

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

NB: **En remarquant que $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ on peut conclure que $(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$**

Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x)=(4-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

1) a) Calculer $f(0)$ et $f(8)$ puis déterminer D_f

b) Montrer que f est continue sur $[0,8]$

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,8[$

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 8.

Interpréter géométriquement.

c) Calculer $f'(x)$ pour $x\in]0,8[$

3) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) En déduire que f réalise une bijection de $[0,8]$ vers $[0,8]$.

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in [0,8]$

d) En déduire que la droite $\Delta : y = x$ est un axe de symétrie de la courbe C de f puis que f n'est pas dérivable à droite en 0.

4) a) Déterminer les coordonnées du point I d'intersection de C avec Δ et donner une équation de la tangente à C en I.

b) Tracer C.

Solution

1) a) $f(0) = 4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 8$ $\qquad f(8) = (4 - 8^{2/3})^{3/2} = 0$.

b) posons $u(x) = 4 - x^{2/3}$ on a : $f = u^{3/2}$

u est continue positive sur $[0,8]$ alors f est continue sur $[0,8]$

2) a) $\left.\begin{array}{l} \bullet\ u \text{ est dérivable sur }]0,8[\\ \bullet\ \forall x \in]0,8[\ ,\ u(x) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ est dérivable sur $]0,8[$

b) dub en 8^- ? posons $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(8)}{x-8}$, $x < 8$

$$\varphi(x) = \frac{(4 - x^{2/3})^{3/2}}{x-8} = \frac{(2 - x^{1/3})^{3/2}(2 + x^{1/3})^{3/2}}{(x^{1/3} - 2)(x^{2/3} + 2x^{1/3} + 4)}$$

$$= \frac{-(2 - x^{1/3})^{\frac{1}{2}}(2 + x^{1/3})^{3/2}}{x^{2/3} + 2x^{1/3} + 4} \Longrightarrow \lim_{8^-} \varphi = 0$$

$\longrightarrow f$ est dérivable à gauche en 8 et $f'_g(8) = 0$.

$\mathscr{C}_f$ admet au point $(8,0)$ une demi-tangente horizontale

d'équation : $\begin{cases} y = 0 \\ x \leq 8 \end{cases}$

Solution

c) $\forall x \in]0,8[$, $f'(x) = \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)\left(4-x^{2/3}\right)^{1/2} = -x^{-1/3}\left(4-x^{2/3}\right)^{1/2}$

3) a)

x	0		8
$f'(x)$		$-$	0
$f(x)$	8	$\searrow$	0

b) f est strictement décroissante sur $[0,8]$ alors elle réalise une bijection de $[0,8]$ sur $f<[0,8]>$ et comme f est continue sur $[0,8]$ alors $f<[0,8]> = [f(8), f(0)] = [0,8]$.

c) $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in [0,8] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in [0,8] \end{cases}$

$f(y) = x \Longleftrightarrow \left(4-y^{2/3}\right)^{3/2} = x \Longleftrightarrow 4 - y^{2/3} = x^{2/3}$

$\Longleftrightarrow y^{2/3} = 4 - x^{2/3} \Longleftrightarrow y = \left(4-x^{2/3}\right)^{3/2}$

d'où $f^{-1}(x) = \left(4-x^{2/3}\right)^{3/2}$, $\forall x \in [0,8]$.

d) On remarque que $f^{-1} = f \rightarrow \mathscr{C}_{f^{-1}} = \mathscr{C}_f$ or $\mathscr{C}_{f^{-1}} = S_\Delta<\mathscr{C}_f>$
donc $\mathscr{C}_f = S_\Delta<\mathscr{C}_f> \Longrightarrow \Delta$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.
. par raison de symétrie $\mathscr{C}_f$ admet au point $(0,8)$ une demi-tg verticale donc f n'est pas dérivable en 0.

Solution

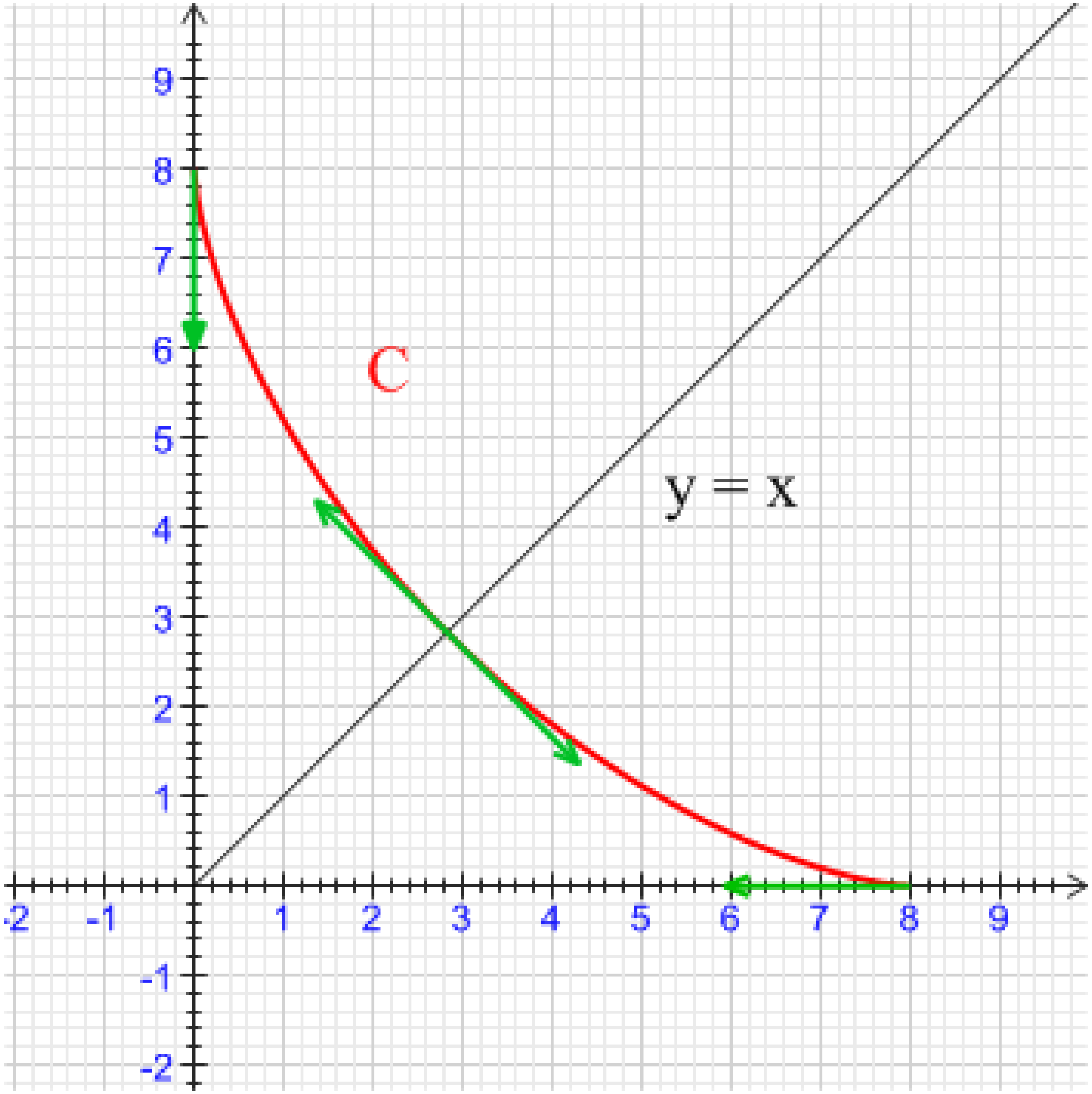
4) a) $\{I(x,y)\} = \mathcal{C} \cap \Delta \iff \begin{cases} f(x) = x \\ x \in [0,8] \end{cases}$

$f(x) = x \iff \left(4 - x^{2/3}\right)^{3/2} = x \iff 4 - x^{2/3} = x^{2/3}$

$\iff x^{2/3} = 2 \iff x = 2^{3/2} = 2\sqrt{2}$ d'où $I(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

• $f'(2\sqrt{2}) = f'(2^{3/2}) = -\left(2^{3/2}\right)^{-1/3}\left(4 - \left(2^{3/2}\right)^{2/3}\right)^{\frac{1}{2}} = -2^{-1/2} \times 2^{1/2} = -1$

$\Longrightarrow \mathcal{T}_I : y = -(x - 2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} \Longrightarrow \mathcal{T}_I : y = -x + 4\sqrt{2}$



9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
C
y = x