Suites réelles

Cours élaboré par le prof: Chouihi

A. Rappels

I. Suites arithmétiques- suites géométriques

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$U_{n+1} = U_n + r$	$U_{n+1} = qU_n$
Relation entre U_n et U_k	$U_n = U_k + (n - k)r$	$U_n = q^{n-k}U_k$
a, b et c termes consécutifs	$2b = a + c$	$b^2 = ac$
$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$	$S_n = \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$	$S_n = \begin{cases} U_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) & \text{si } q \neq 1 \\ nU_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}$
$S = \sum_{k=p}^{n} U_k$	$S = \frac{(n-p+1)}{2}(U_p + U_n)$	$S = \begin{cases} U_p \frac{(1-q^{n-p+1})}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n-p+1)U_p & \text{si } q = 1 \end{cases}$

Exercice N°1

Soit (U_n) la suite réelle définie par : $U_0 = 1$ et

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = -\dfrac{3}{2}U_n^2 + \dfrac{5}{2}U_n + 1$.

1°) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

2°) Peut-on faire une conjecture sur U_n ?

Prouver votre conjecture.

Exercice N°2

On considère la suite (U_n) définie sur IN par :

$U_0 = 4$ et, pour tout $n \in$ IN, $U_{n+1} = U_n^2$.

1°) Calculer U_1, U_2, U_3, et U_4.

2°) Peut-on faire une conjecture sur U_n ?

Prouver votre conjecture.

Exercice N°3

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{4 - U_n^2}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $V_n = \dfrac{2 + U_n^2}{2 - U_n^2}$

1°) Montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

2°) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

3°) Calculer $S_n = 1 \times U_0^2 + 2\,U_1^2 + 3\,U_2^2 + \cdots + n\,U_{n-1}^2$ en fonction de n.

Exercice N°4

Ecrire avec le symbole Σ puis calculer les sommes suivantes :

$S_1 = 2\times9 + 2\times81 + 2\times729 + \ldots + 2\times9^k$

$$S_2 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots + \frac{256}{6\,561}.$$

$S_3 = 21 + 25 + 29 + \ldots$ (20 termes)

$S_4 = 7 + 12 + 17 + \ldots + 102.$

B. Cours

NB. Dans tout ce qui suit $I = \{ n \in IN \text{ tel que } n \geq n_0 \}$ où n_0 est un entier naturel fixé, et U est une suite réelle définie sur I.

II. Majoration - Minoration

Activité

Soit U la suite définie sur IN par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+3U_n^2}{3+U_n^2}}$

Montrer que pour tout $n \in IN$; $0 \leq U_n < 1$

Définitions

- La suite U est dite minorée ssi il existe un réel m tel que,
  pour tout $n \in I$, on ait : $U_n \geq m$

Exemple : $U_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que la suite U est minorée par 2.

- La suite U est dite majorée ssi il existe un réel M tel que,
  pour tout $n \in I$, on ait : $U_n \leq M$

Exemple : $U_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que la suite U est majorée par 2.

- La suite U est dite bornée ssi elle est à la fois majorée et minorée $\Leftrightarrow$
  il existe un réel $k > 0$ tel que : pour tout $n \in I$, $|U_n| \leq k$.

Exemple : $U_n = \dfrac{n\,\mathbf{sin(n)}}{2n+1}$. Montrer que la suite U est bornée.

Exercice

Montrer que chacune des suites définies ci-dessous est bornée.

$$u_n = 3 + \frac{2n}{n^2+1},\ n \geq 0.$$

$$v_n = 3 - 2\cos(4n-1),\ n \geq 0.$$

$$w_n = 1 + \frac{(-5)^n}{6^n\sqrt{n}},\ n > 0.$$

III. Monotonie

Définitions

- La suite U est dite croissante sur I ssi pour tout $n \in I$, $U_{n+1} \geq U_n$

Exemple : $U_0 \in IR$ et $U_{n+1} = U_n^2 - U_n + 1$, $n \in IN$.

Montrer que la suite U est croissante.

- La suite U est dite strictement croissante sur I ssi pour tout $n \in I$, $U_{n+1} > U_n$

Exemple : Soit U la suite définie sur IN par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+3U_n^2}{3+U_n^2}}$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$; $0 \leq U_n < 1$
b) Montrer que la suite U est strictement croissante.

Définitions

- La suite U est dite décroissante sur I ssi pour tout $n \in I$, $U_{n+1} \leq U_n$.

Exemple : $U_0 \in IR$ et $U_{n+1} = -U_n^2 + 5U_n - 4$, $n \in IN$.

Montrer que la suite U est décroissante.

- La suite U est dite strictement décroissante sur I ssi pour tout $n \in I$, $U_{n+1} < U_n$

Exemple : Soit U la suite définie sur IN par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n > 2$
b) Montrer que la suite U est strictement décroissante.

- La suite U est dite constante ssi pour tout $n \in I$, on ait : $U_{n+1} = U_n$

Exemple : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$. Vérifier que la suite U est constante.

- La suite U est dite stationnaire (constante à partir d'un certain rang) ssi

il existe $p \in I$, tel que :pour tout $n \geq p$, $U_{n+1} = U_n$

Exemple : $U_0 = \frac{2}{3}$ et $U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n^2 - 2U_n + 3$. Montrer que la suite U est stationnaire.

Exercice

Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} U_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* ; U_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)} U_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$$

1°) a) Montrer par récurrence que la suite U est majorée par 3

b) Etudier la monotonie de la suite U.

2°) On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = n(3 - U_n)$

a) Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison q et calculer son premier terme V_1.

b) Exprimer V_n en fonction de n puis calculer U_n en fonction de n.

IV. Représentation graphique des suite récurrentes (du types $U_{n+1} = f(U_n)$

Activité

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction f définie par $f(x) = 2\sqrt{3+x}$ et la suite U définie par:

$U_0 \in IR$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

On se propose de représenter graphiquement la suite U.

1/On suppose $U_0 = -2$

a) Tracer la courbe C_f et la droite Δ d'équation: $y = x$.

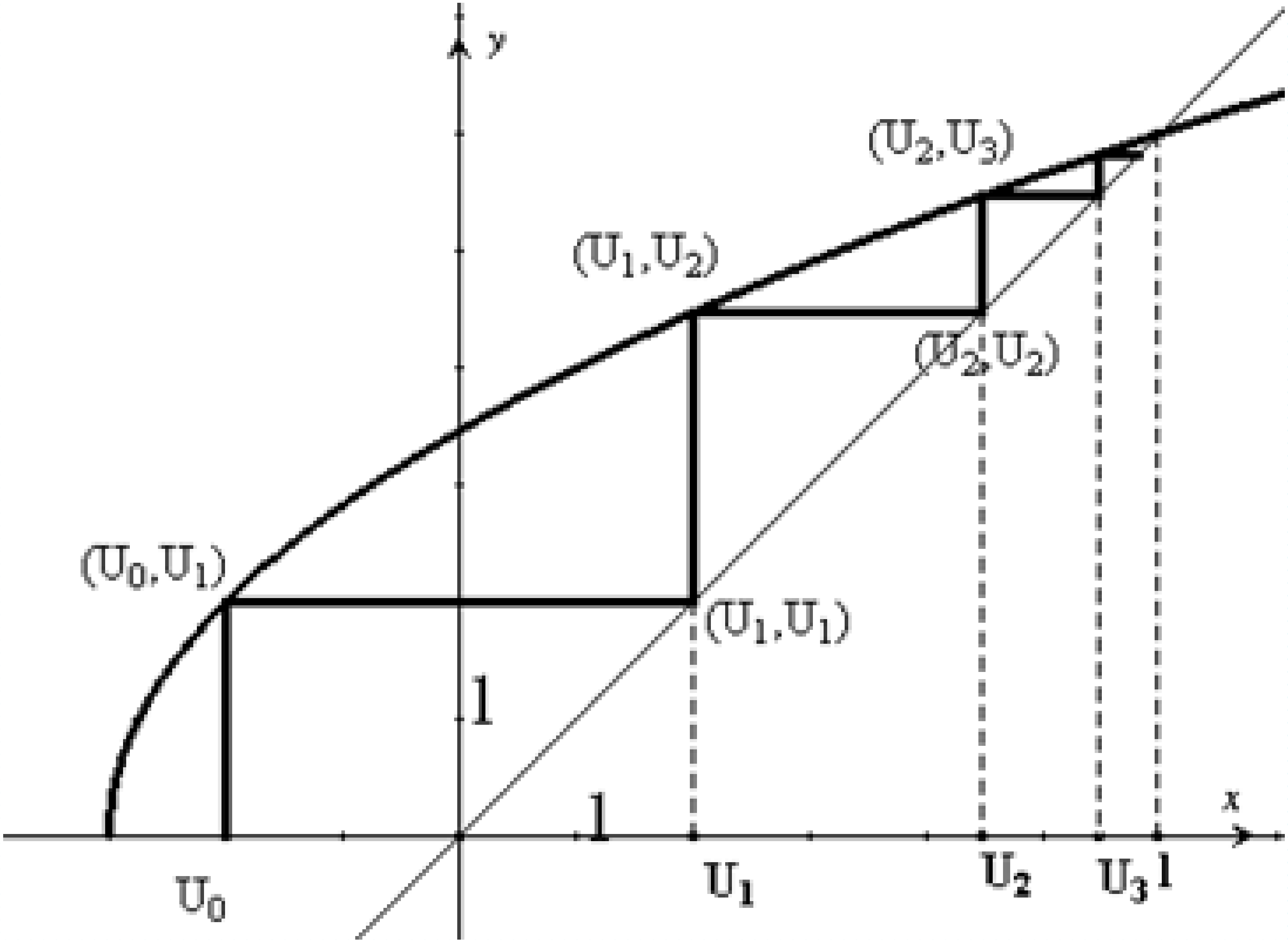
b) Placer les points $A_1(U_0,U_1)$; $B_1(U_1,U_1)$; $A_2(U_1,U_2)$; $B_2(U_2,U_2)$; $A_3(U_2,U_3)$ et $B_3(U_3,U_3)$.

c) Placer sur l'axe des abscisses les termes U_0, U_1, U_2 et U_3.

d) Que peut on conjecturer pour la suite U?

2/ Reprendre les questions du 1/ pour $U_0 = 10$ puis pour $U_0 = 6$

Théorème



V. Convergence

Activité

On pose $U_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

1°) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

2°) Déterminer un entier p tel que:

a) Pour tout $n \geq p$, $|U_n - 2| < 10^{-2}$.

b) Pour tout $n \geq p$, $|U_n - 2| < 10^{-5}$.

c) Pour tout $n \geq p$, $|U_n - 2| < \varepsilon$; $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Définition

Soit U une suite définie sur I et $\ell \in IR$.

$$\left(\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell \right) \Leftrightarrow \left(\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } p \in IN \text{ tel que: } n \geq p \Rightarrow \left|U_n - \ell\right| < \varepsilon \right)$$

Dans ce cas on dit que la suite U **<u>converge</u>** vers ℓ et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ ou $\lim U = \ell$.

<u>NB:</u>

- La suite U est dite convergente si et seulement si elle admet une limite finie.
- La suite U est dite divergente si et seulement si elle n'est pas convergente

$\Leftrightarrow$ U n'a pas de limite ou U a une limite infinie.

I. Limite d'une suite géométrique

	$a \leq -1$	$-1 < a < 1$	$a = 1$	$a > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} a^n$	n'existe pas	0	1	$+\infty$

Conséquences: Soit U une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul U_0.

Si: $-1 < q < 1$ alors U converge vers 0

Si: $q \leq -1$ alors U n'a pas de limite et elle est divergente

Si: $q = 1$ alors U est constante et elle converge vers U_0.

Si: $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \infty$ (avec signe de U_0) et par suite elle est divergente

Exemple

On pose $U_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que la suite U est convergente.

Théorème

Si

une suite U admet une limite finie ℓ

alors

cette limite est **unique**.

Théorème

Soit U une suite définie sur I et $\ell \in IR \cup \{-\infty, +\infty\}$

$$\left(\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} U_{2n} = \ell \ \underline{\textbf{et}} \ \lim_{n\to+\infty} U_{2n+1} = \ell\right)$$

Exemple: On pose $U_n = (-1)^n$. Montrer que U est divergente.

NB: **Si** $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$ **alors** $\left(\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \ell ; \lim_{n\to+\infty} U_{2n} = \ell ;\right.$

$$\left.\lim_{n\to+\infty} U_{2n+1} = \ell ; \lim_{n\to+\infty} U_{an+b} = \ell, \ a\in IN^* \text{ et } b\in IN\right)$$

Toute suite convergente est bornée

<u>Démonstration:</u> Soit $\varepsilon > 0$.

Hypothèse: $\lim U = \ell$ alors il existe $p \in I$ tel que: $n \geq p$

$$\Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon + \ell < U_n < \varepsilon + \ell$$

En posant: $m = \inf(-\varepsilon + \ell, U_{n0}, U_{n0+1}, \ldots, U_{p-1})$ et

$M = \sup(\varepsilon + \ell, U_{n0}, U_{n0+1}, \ldots, U_{p-1})$ on déduit que:

pour tout $n \in I$, $m < U_n < M$ et par suite que U est bornée.

Théorème (admis)

$$* \ \textbf{Si} \begin{cases} U \text{ est croissante} \\ U \text{ est majorée} \end{cases} \textbf{alors}$$

U est convergente vers un réel ℓ et pour tout $n \in I$, $U_n \leq \ell$.

$$* \ \textbf{Si} \begin{cases} U \text{ est decroissante} \\ U \text{ est minorée} \end{cases} \textbf{alors}$$

U est convergente vers un réel ℓ et pour tout $n \in I$, $U_n \geq \ell$.

NB: Le théorème précèdent assure la convergence mais ne permet pas le calcul de la limite.

VI. Image d'une suite par une fonction

Théorème

$$\text{Si}\begin{cases}\text{une suite } \left(U_n\right) \text{ converge vers une limite } \ell \\ \text{une fonction f est continue en } \ell\end{cases}$$

Alors la suite $(f(U_n))$ converge vers $f(\ell)$

Exemple N°1

Soit V la suite définie par $V_n = \sin(\frac{\pi n+3}{2n+1})$

Montrer que la suite V est convergente vers une limite que l'on précisera

Exemple N°2

Soit la suite U définie par $U_0 = \sin\alpha_0$ et la relation, $\forall n \in IN$, $U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1-U_n}{2}}$,

avec $\alpha_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$

a) Etablir que : $\forall n \in IN$, il existe $\alpha_n \in [-\pi/2, \pi/2]$ unique, tel que : $U_n = \sin\alpha_n$.
Quelle relation y-t-il entre α_{n+1} et α_n ?

b) On considère la suite (β_n) de terme général $\beta_n = \alpha_n - \pi/6$.
Montrer que cette suite est géométrique, en déduire α_n puis U_n en fonction de n et α_0.
Déterminer si c'est possible la limite de la suite U.

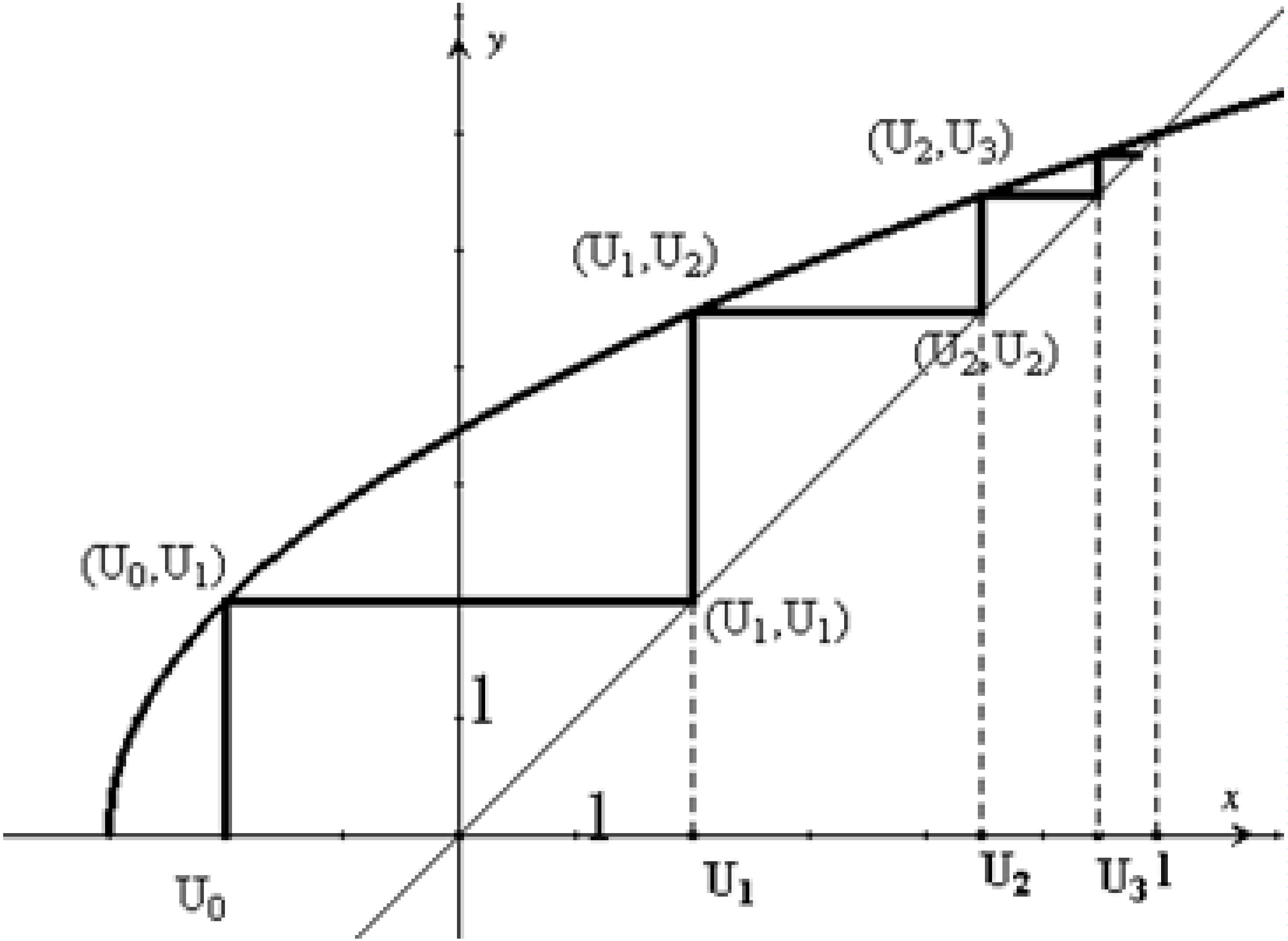
Corollaire

Soit U une suite à valeurs dans un intervalle I et f une fonction définie sur I.
On suppose que U converge vers une limite ℓ .

Si $\begin{cases} U_{n+1} = f(U_n) \\ f \text{ est continue sur } I \end{cases}$ alors

ℓ est solution de l'équation : $\begin{cases} f(\ell) = \ell \\ \ell \in I \end{cases}$

Théorème



Exemple

Soit U la suite définie sur IN par :

$$U_0 = 2 \text{ et } U_{n+1} = \frac{3U_n - 2}{2U_n - 1}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $1 < U_n \leq 2$.

b) Montrer que la suite U est décroissante.

c) En déduire que U est convergente puis calculer sa limite.

Théorème

$$\text{Si} \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \end{cases}$$

$$\text{alors} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n) = \ell$$

Exemple

On pose $V_n = \dfrac{2\times 3^n - 5}{3^n + 4}$, $n \in \mathbb{N}$

En utilisant le théorème, vérifier que V converge vers 2.

Théorèmes de comparaisons

Théorème

Soit U une suite convergente vers une limite ℓ.

- Si [il existe $p \in IN$, tel que pour tout $n \geq p$ on ait : $U_n > 0$]

  alors [$\ell \geq 0$]

- Si [il existe $p \in IN$, tel que pour tout $n \geq p$ on ait : $U_n < 0$]

  alors [$\ell \leq 0$]

Conséquence

m et M étant deux réels donnés

$$\text{Si } \begin{cases} \text{il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geq p,\ m \leq U_n \leq M \\ U \text{ converge vers une limite finie } \ell \end{cases}$$

alors $m \leq \ell \leq M$

Corollaire

Soit U et V deux suites convergentes respectivement

vers ℓ et ℓ'.

Si [il existe $p \in IN$, tel que pour tout $n \geq p$ on ait : $U_n > V_n$]

alors [$\ell \geq \ell'$]

Activité

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}$

a) Calculer U_1 et U_2 .

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{2n}{n+1} \leq U_n \leq \frac{2n+2}{n}$

c) En déduire que la suite U converge et calculer sa limite.

Théorème

Soient U, V et W trois suites.

Si $\begin{cases} \text{il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geq p, \text{ on a} : W_n \leq U_n \leq V_n \\ V \text{ et } W \text{ convergent vers la meme limite } \ell \end{cases}$

Alors U converge et $\lim U = \ell$

Corollaire

Si $\begin{cases} \text{il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geq p, \text{ on a} : |U_n| \leq |V_n| \\ V \text{ converge vers } 0 \end{cases}$

alors U converge vers 0

Exemple

Soit U la suite définie sur IN par : $U_n = (\frac{1}{2})^n \sin(\frac{n\pi}{3})$.

Etudier la convergence de la suite U.

Théorème

Soient U et V deux suites.

- Si $\begin{cases} \text{il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geq p, \text{ on a} : U_n \leq V_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty \end{cases}$

  alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$

- Si $\begin{cases} \text{il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geq p, \text{ on a} : U_n \geq V_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty \end{cases}$

  alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

Exemple

Soit la suite U définie par $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k}}$.

a) Calculer U_1 et U_2.

b) Montrer que : $U_n \geq \frac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{n^2+n}}$

c) En remarquant que : $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$,

déduire la limite de la suite U.

Théorème

- Toute suite **croissante** et **non majorée** tend vers $+\infty$

- Toute suite **décroissante** et **non minorée** tend vers $-\infty$

Application

Soit U la suite définie sur IN* par $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

a) Montrer que U est croissante.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$.

c) En déduire que la suite U n'est pas majorée.

d) Déterminer alors la limite de la suite U.

Exercice N°10 page 48

10 On considère la suite (w_n) définie par

$w_n = \dfrac{n!}{3^n}, n \geq 0$.

1. Montrer que $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} \geq \dfrac{4}{3}, \; n \geq 3$.

2. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

IV. Suites adjacentes

Théorème et définition

Si deux suites U et V définies sur I vérifient les conditions :

(1) Pour tout $n \in I$, $U_n \leq V_n$.

(2) U est croissante et V est décroissante .

(3) La suite $(U - V)$ converge vers 0.

Alors les suites U et V sont convergentes et elles convergent vers la même limite

Vocabulaire : Dans ces conditions, les suites U et V sont dites **adjacentes**.

Exercice

On considère les suites U et V définies sur IN* par :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } V_n = U_n + \frac{1}{n!}$$

1) Calculer U_1, U_2, U_3, V_1, V_2 et V_3.
2) Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n \leq V_n$.
3) Montrer que la suite U est croissante et que la suite V est décroissante.
4) Vérifier que les suites U et V sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite que l'on notera e.
5) Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n \leq e \leq V_n$.
6) En déduire que : $\dfrac{65}{24} \leq e \leq \dfrac{11}{4}$

Exercice N°16 page 48

16 On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{E(\pi)+E(2\pi)+\ldots+E(n\pi)}{n^2},\ n \geq 1,\ \text{où } E(x)$$

désigne la partie entière de x.

1. Montrer que pour $n \geq 1$,

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}.$$

2. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice N°17 page 48

17 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{n}{n^2}\right).$$

On se propose d'étudier la limite de la suite (u_n).

Application

1. Soit la suite $\left(v_n\right)$ définie par

$$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2},\ n \geq 1.$$

Montrer que la suite $\left(v_n\right)$ converge vers $\frac{1}{2}$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \leq n^4$.

3. Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_n - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n$.

5. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice (Activité N°2 page 44)

Soit les deux suites (u_n) et (v_n) définies par

$u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$.

1. a. Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est une suite géométrique que l'on déterminera.

   b. En déduire que pour tout n, $u_n \leq v_n$

   c. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

   d. Vérifier alors que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles convergent vers la même limite α.

2. Montrer que la suite $(v_n + u_n)$ est une suite constante que l'on déterminera.

3. Déterminer u_n et v_n en fonction de n.

4. Calculer α.

Exercice N°22 page 50

22 Soit $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ les suites définies par

$$u_n = \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)} \text{ et}$$

$$v_n = \frac{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}{3\times5\times\ldots\times(2n+1)}, \quad n \geq 1.$$

1. a. Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante.

b. En déduire qu'elle converge vers un réel positif ℓ.

2. a. Montrer que la suite $\left(v_n\right)$ est décroissante.

b. En déduire qu'elle converge vers un réel positif ℓ'.

Exercice N°22 page 50 (suite)

3. Soit $\left(w_n\right)$ la suite définie par $w_n = u_n . v_n$.

a. La suite $\left(w_n\right)$ est-elle convergente ?

b. Déterminer w_n en fonction n.

c. En déduire que $\ell . \ell' = 0$.

4. a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n < v_n$.

b. En déduire que $\ell = 0$.

c. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $2u_{n+1} > v_n$.

d. En déduire ℓ' .