Les similitudes planes

I. Les triangles semblables

Définition

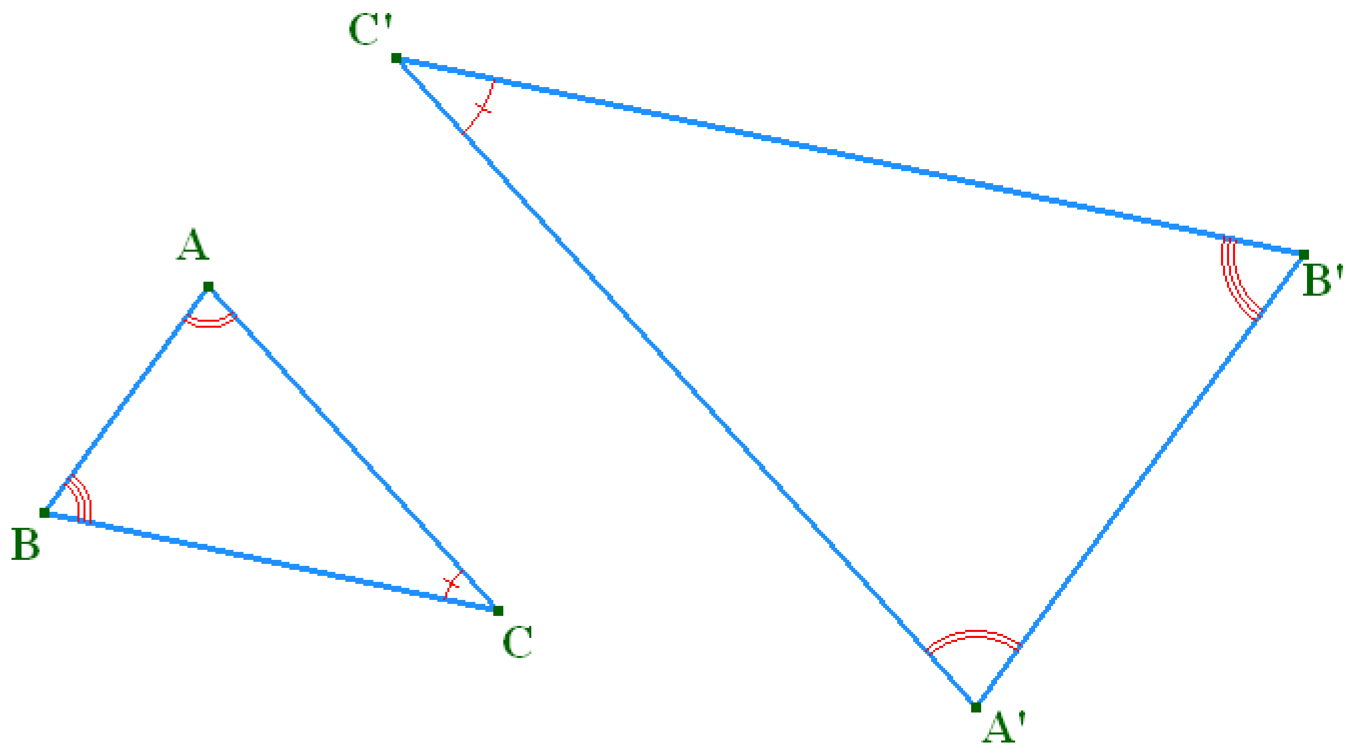
Deux triangles ABC et A’B’C’ sont dits semblables

si et seulement si

l’une des propositions équivalentes suivantes est réalisées :

▹ $A = A'\ ;\ B = B'\ \text{ et }\ C = C'$

▹ $$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$


C'
A
B'
B
C
A'

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$

Théorème

Deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables

si et seulement si

l'une des propositions équivalentes suivantes est réalisées :

- $\hat{A}' = \hat{A}$ **et** $\hat{B} = \hat{B}'$
- $\hat{A} = \hat{A}'$ **et** $A'B'/AB = A'C'/AC$

Remarques :

- **Si les triangles ABC et A’B’C’ sont semblables alors le rapport k = A’B’/AB = A’C’/AC = B’C’/BC est dit rapport de similitude du triangle ABC au triangle A’B’C’.**

- **Si les triangles ABC et A’B’C’ sont semblables et de même orientation alors on dit qu’ils sont directement semblables.**

- **Si les triangles ABC et A’B’C’ sont semblables et d’orientations contraires alors on dit qu’ils sont indirectement semblables.**

Application N° 1

ABC est un triangle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$.

La bissectrice du secteur [AB,AC]coupe [BC] en I et $\mathcal{C}$ en D.

Montrer que les triangles ADB et ACI sont semblables.

Application N° 1

ABC est un triangle inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$.

La bissectrice du secteur [AB,AC]coupe [BC] en I et $\mathscr{C}$ en D.

Montrer que les triangles ADB et ACI sont semblables.

II. Définition des similitudes et propriétés

1° / Activité

Dans le plan orienté, on considère l'application S de P dans lui même qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que :

$z' = (1 + i)z + 2 + i$.

Soient M et N deux points du plan d'images respectives M' et N' par S.

1. **Exprimer M'N' en fonction de MN.**
2. **Montrer que S admet un unique point invariant I.**

3) Pour tout point $M \neq I$, établir l'équivalence :

$$S(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} IM' = \sqrt{2}IM \\ (\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$$

4) On désigne par h l'homothétie de centre I et de rapport 2 et par R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Montrer que : $S = h \circ R = R \circ h$.

2° / Définition

Soit f une application du plan P dans lui même ;

on dit que f est une similitude

si et seulement si

il existe un réel <u>k</u> <u>strictement positif</u> tel que :

pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f

on a : M'N' = k MN.

Le réel k s'appelle le rapport de la similitude f.

<u>Exemples :</u>

Toute isométrie est une similitude de rapport …..

Toute homothétie de rapport λ est une similitude de rapport k = …..

Théorème

La composée de deux similitudes est une similitude de rapport le produit des rapports.

Prouver ce résultat.

3° / Décomposition d'une similitude

Activité

1) **Soient h une homothétie de rapport λ ($\lambda \neq 0$) et φ une isométrie. On pose $f = h o \varphi$; montrer que f est une similitude dont on précisera le rapport.**

2) **Soit f une similitude de rapport k ($k > 0$) et A un point du plan. On pose $h = h(A, k)$ et $\varphi = h^{-1} o f$.**

a. **Montrer que φ est une isométrie et en déduire que f est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.**

b. **Cette décomposition est elle unique ?**

Théorème

Une application f du plan P dans lui même est une similitude de rapport k ($k > 0$)

si et seulement si

elle s'écrit sous la forme : $f = h \circ \varphi$, où h est une homothétie de rapport k et φ est une isométrie.

Conséquences

Du théorème précèdent en déduit que :

1. **Toutes les propriétés communes aux homothéties et aux isométries restent valables pour les similitudes (conservation de l'alignement, du contact, du parallélisme, de l'orthogonalité, du barycentre,, de l'équipollence …)**
2. **Si $\overrightarrow{EF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{E'F'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{C'D'}$**
3. **L'image d'un segment [AB] par une similitude f de rapport k est un segment [A'B'] tel que : A'B' = kAB.**
4. **L'image d'une droite par une similitude est une droite.**
5. **L'image d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $\mathscr{R}$ par une similitude f de rapport k est un cercle $\mathcal{C}$' de centre O' = f(O) et de rayon k$\mathscr{R}$.**

4° / Théorème

Toute similitude de rapport k est une bijection dont la réciproque est une similitude de rapport 1/k

<u>Preuve :</u> le résultat précédent découle de la décomposition d'une similitude.

5° / Activité

1. Montrer que toute homothétie h de rapport λ ($\lambda \neq 0$) conserve les mesures des angles orientés.

2. On considère quatre points A, B, C et D d'images respectives A', B', C' et D' par une similitude f de rapport k.

a) Exprimer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ en fonction de AB, CD et $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$

b) En déduire : $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'} = k^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

c) Énoncer ainsi le théorème démontré.

6° / Activité

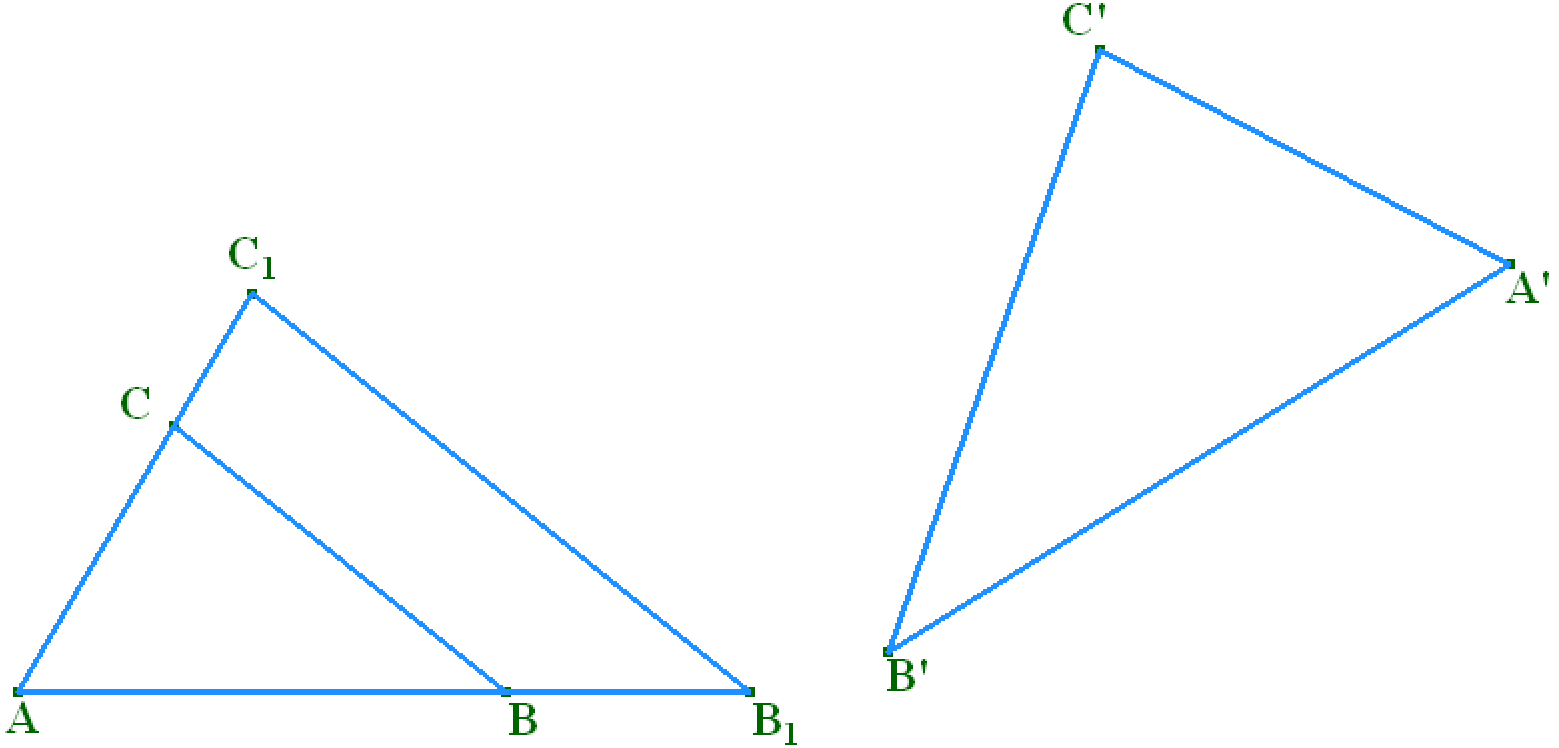
On considère deux triangles semblables ABC et A'B'C' et on désigne par k le rapport de similitude du triangle ABC au triangle A'B'C'. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport k et par B_1 et C_1 les images respectives des points B et C par h.

a) Vérifier que les triangles AB_1C_1 et A'B'C' sont isométriques et en déduire qu'il existe une unique isométrie φ transformant AB_1C_1 en A'B'C'

b) On pose $f = \varphi o h$. Vérifier que f est une similitude qui transforme ABC en A'B'C'.

c) On suppose qu'il existe une similitude g transformant ABC en A'B'C' et on pose $\Psi = g^{-1} o f$.

Caractériser Ψ et en déduire l'unicité de f.


C'
A'
B'
C1
C
A
B
B1

Théorème

Si ABC et A'B'C' sont deux triangles semblables

alors

il existe une unique similitude f vérifiant :

f(A) = A', f(B) = B' et f(C) = C'

Remarque :

le rapport de f est celui de similitude du triangle ABC au triangle A’B’C’.

Conséquence :

Si deux similitudes coïncident en trois points non alignés alors elles sont égales.

On dit qu'une similitude est bien déterminée par la donnée de trois points non alignés et de leurs images.

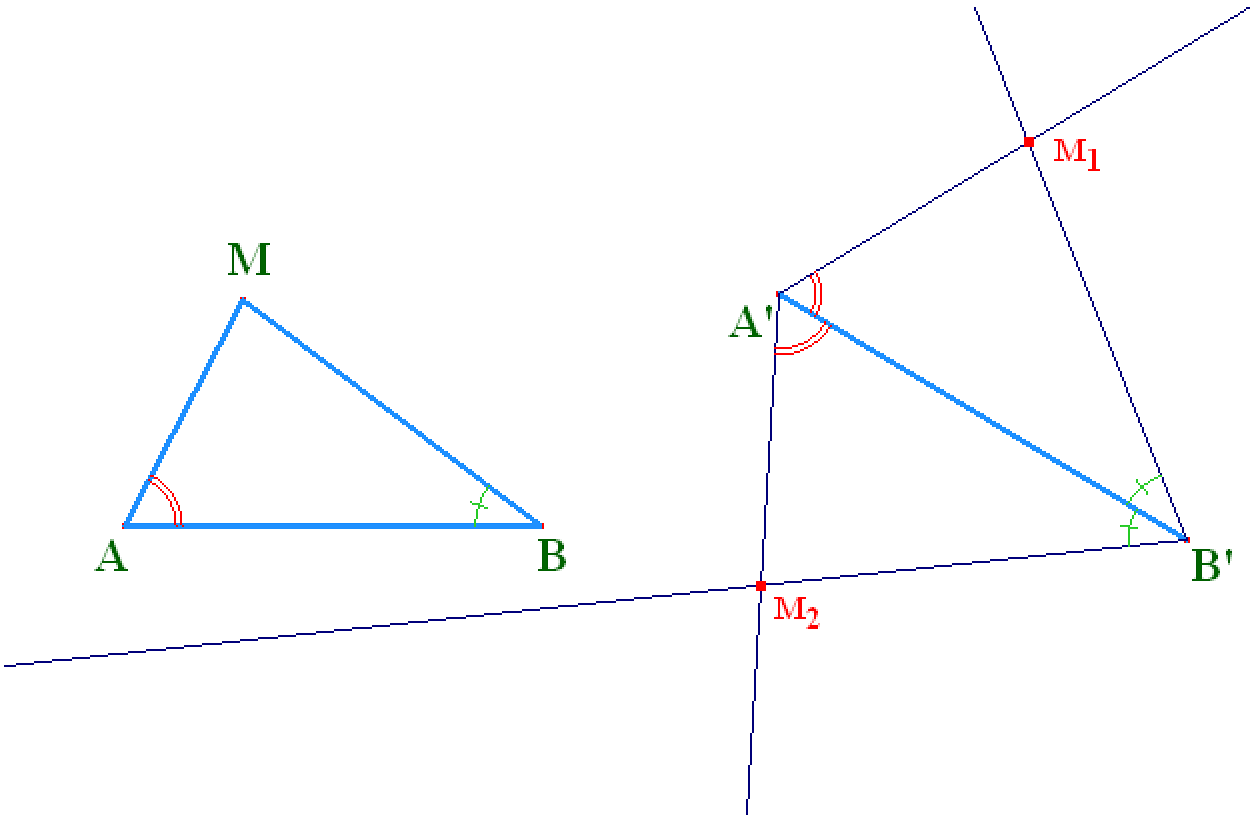
III. Classification des similitudes

1° / Activité N° 1

Soient A et B deux points distincts d'images respectives A' et B' par une similitude f et M un point du plan tel que :
A, B et M ne sont pas alignés.

a) Construire, si c'est possible, l'image M' du point M par f. Le problème admet il une solution unique ?

b) Pour chaque point M' obtenu, comparer l'orientation du triangle A'B'M' avec celle de ABM.


M
A
B
A'
B'
M1
M2

Activité N° 2

On considère deux homothéties h et h' de rapport respectifs λ et λ'et on se propose de caractériser l'application $\varphi = h' \circ h$.

Soient M et N deux points du plan. On pose :

$$\begin{cases} h(M) = M_1 \\ h(N) = N_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} h'(M_1) = M' \\ h'(N_1) = N' \end{cases}$$

1) Préciser $\varphi(M)$ et $\varphi(N)$

2) Exprimer $\overrightarrow{M'N'}$ en fonction de $\overrightarrow{MN}$.

3) <u>On suppose que $\lambda\lambda' = 1$</u>.

Soit A un point du plan d'image A' par φ

a) Montrer que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.

b) Caractériser alors φ.

4) <u>On suppose que $\lambda\lambda' \neq 1$.</u>

a) Montrer que φ admet un unique point invariant I.

b) Montrer que $\overrightarrow{IM'} = \lambda\lambda'\overrightarrow{IM}$.

c) Caractériser alors φ

<u>Retenons</u>

La composée de deux homothéties de rapports λ et λ' est :

- ✓ **Une translation si $\lambda\lambda' = 1$.**
- ✓ **Une homothétie si $\lambda\lambda' \neq 1$.**

Activité N° 3

Soit f une similitude de rapport k. On décompose f sous les formes : $f = h \circ \varphi$ et $f = h' \circ \varphi'$ où h et h' sont deux homothéties de rapports k ; φ et φ' deux isométries.

En exprimant φ' en fonction de h, h' et φ déduire les résultats suivants :

a) φ est un déplacement ⇔ φ' est un déplacement.

b) φ est un antidéplacement ⇔ φ' est un antidéplacement.

Définitions

Soit f une similitude et f = hoφ une décomposition de f en la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

- **f est dite similitude directe (ou positive) si et seulement si φ est un déplacement.**
- **f est dite similitude indirecte (ou négative) si et seulement si φ est un antidéplacement.**

Conséquences

a) **Puisque les homothéties conservent les mesures des angles orientés en déduit que :**

- **Les similitudes directes conservent les mesures des angles orientés.**
- **Les similitudes indirectes transforment les mesures des angles orientés en leurs opposées.**

b) **La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.**

La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.

La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

c) **La réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.**

La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

IV. Les similitudes directes

1/ Angle d'une similitude directe

Soit f une similitude directe de rapport k et f = hoφ une décomposition de f où h est une homothétie de rapport k et φ est un déplacement d'angle θ.

Soient A et B deux points distincts du plan d'images respectives A' et B' par f.

A_1 et B_1 étant les images respectives de A et B par φ ; vérifier que $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{A_1B_1}$ et en déduire que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

En considérant une autre décomposition de f, prouver que le réel θ ne dépend que de f, ce réel est appelé angle de la similitude directe f.

Retenons

Pour toute similitude directe f il existe un réel θ (déterminé à $2k\pi$ prés) tel pour tous points A et B distincts d'images respectives A' et B' par f on a : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta\ [2\pi]$

Le réel θ est appelé angle de f.

2° / Centre d'une similitude directe

Soit f une similitude directe de rapport k et d’angle θ.

Remarquons que si $k = 1$ alors f est un déplacement et par suite c’est une translation ou une rotation (cas déjà étudiés dans le chapitre précédent)

<u>On suppose dans la suite que $k \neq 1$</u>

f est une similitude de rapport $k \neq 1$ donc f est différente de l'identité et par suite il existe au moins un point A du plan tel que $f(A) = A' \neq A$.

On se propose de déterminer l'ensemble des points invariants par f.

S'il existe un point M du plan invariant par f alors $M \neq A$ et on peut écrire :

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} MA' = kMA & (1) \\ (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}}) \equiv \theta [2\pi] & (2) \end{cases}$$

Désignons par $\Gamma = \{ M \in P$ tel que : $\dfrac{MA'}{MA} = k \}$

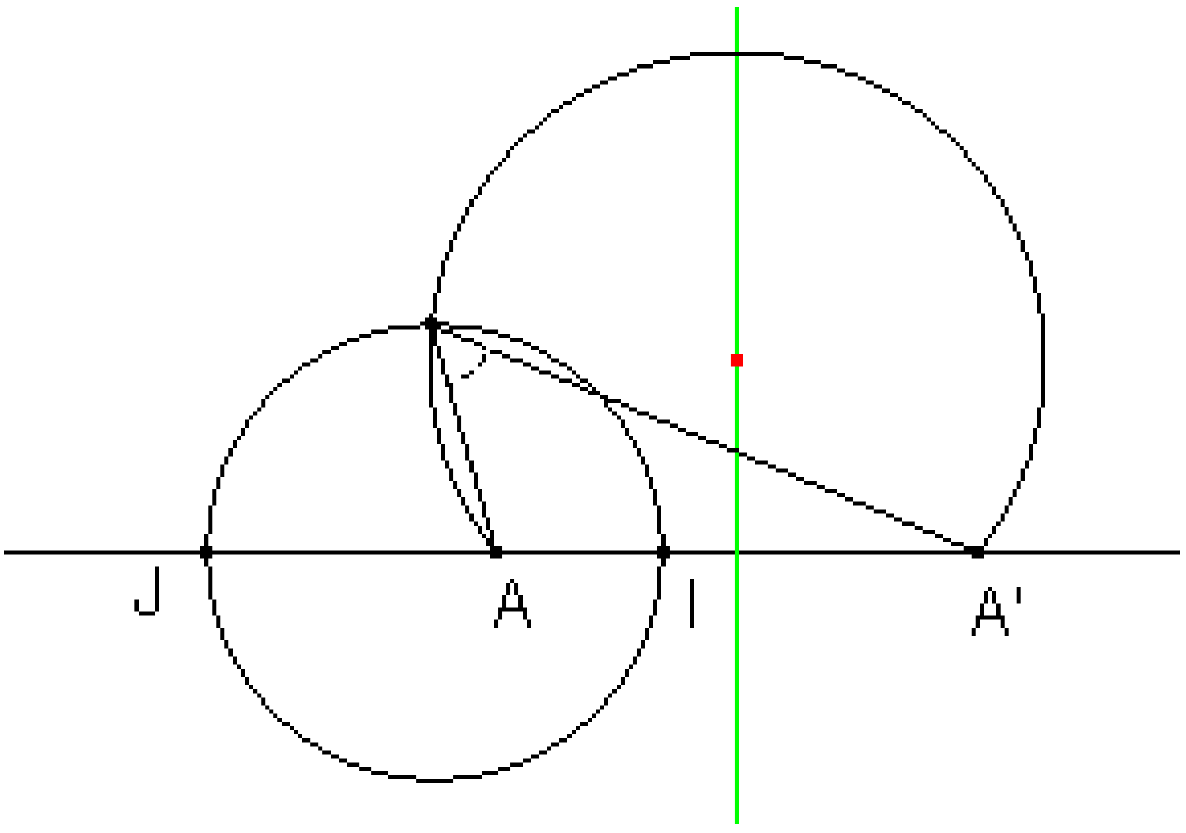
et par $\Gamma' = \{ M \in P$ tel que : $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}}) \equiv \theta [2\pi] \}$

On rappelle que :

•Puisque $k \neq 1$, alors Γ est le cercle de diamètre [IJ] où I est le barycentre du système { (A',1), (A,k)} et J est le barycentre du système {(A',1), (A,-k)}

•Γ'est : soit un arc de cercle d'extrémités A et A' (si $\theta \neq k\pi$) , soit le segment [AA'] privé des points A et A', soit (AA') – [AA'].

Il résulte que dans tous les cas les ensembles Γ et Γ' se coupent en un unique point Ω et par suite f admet un unique point invariant Ω appelé centre de f.


J
A
I
A'

Retenons

Toute similitude directe, différente d'une translation, admet un unique point invariant Ω appelé <u>centre</u> de la similitude.

3° / Récapitulation

Une similitude directe f, différente d'une translation, est caractérisée par : son rapport k, son angle θ et son centre Ω

On note : **f = $S_{(\Omega,k,\theta)}$.**

Ω, k et θ sont appelés éléments caractéristiques de la similitude directe.

Conséquence

- Si f = $S_{(\Omega,k,\theta)}$ alors pour tout M≠Ω on a :

$$\mathbf{f(M) = M'} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \widehat{\ \ }\overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

- $S^{-1}_{(\Omega,k,\theta)}=$ …………

- $S_{(\Omega,k,\theta)}$ o $S_{(\Omega,k',\theta')}=$ …………

Application

On pose f = $S_{(I,\ 2,\ \frac{\pi}{3})}$.

Construire l'image M' d'un point M du plan.

Cas particuliers

Compléter en justifiant :

- $S_{(\Omega,k,\pi)}=$ ……………
- $S_{(\Omega,k,0)}=$ ……………
- $S_{(\Omega,1,\theta)}=$ ……………

4°/ Forme réduite d'une similitude directe

Activité

Soit f une similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ. On pose $h = h_{(\Omega,k)}$ et $R = R_{(\Omega,\theta)}$

Montrer que $f = h\, oR = Roh$.

Théorème

Toute similitude directe f de centre Ω, de rapport k et d'angle θ se décompose, d'une manière unique, sous la forme : $f = Roh = hoR$; où $h = h_{(\Omega,k)}$ et $R = R_{(\Omega,\theta)}$

Cette décomposition est appelé forme réduite de f.

5° / Activité

On considère deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$

On pose $k = \dfrac{A'B'}{AB}$ et on désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport k et par B_1 l'image de B par h.

a) Montrer qu'il existe un déplacement unique φ transformant A en A' et B_1 en B'.

b) On pose f = φ oh. Vérifier que f est une similitude directe qui transforme A en A' et B en B'.

c) On suppose qu'il existe une similitude directe g transformant A en A' et B en B' et on pose $\Psi = g^{-1} of$

Caractériser Ψ et en déduire que f = g.

Si

Théorème

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont deux vecteurs non nuls, alors il existe une Similitude directe unique f tel que : f(A)=A' et f(B) =B'

<u>Remarque :</u>

On dit qu'une similitude directe est parfaitement déterminée par la donnée de deux points distincts et leurs images.

Corollaire

Si deux similitudes directes coïncident en deux points distincts, alors elles sont égales.

Justifier ce résultat.

Activités

1°/ On considère un carré ABCD de sens direct et de centre I. Donner les éléments caractéristiques de la similitude directe f dans chacun des cas suivants :

a) f est de centre C et transforme A en B.

b) f est de centre A et transforme B en C.

c) f transforme B en I et C en D.

2°/ On considère un triangle ABC équilatéral de sens direct. On désigne par I le milieu de [BC]

Donner les éléments caractéristiques de la similitude directe f dans chacun des cas suivants :

a) f de centre C est transforme I en A.

b) f de centre I et transforme C en A.

6° / Similitudes directes et nombres complexes

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{v_0})$

Activité N° 1

Soient a et b deux nombres complexes tels que : $a \neq 1$ et $a \neq 0$
et soit f l'application de P dans lui même qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que : $z' = az + b$.

a) Montrer que f admet un unique point invariant $\Omega(z_0)$.

b) Etablir que pour tout $M \neq \Omega$, on a :

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

c) Conclure.

Activité N° 2

Soit f une similitude directe de centre $\Omega(z_0)$, de rapport k et d'angle θ.
Soit $M(z) \neq \Omega$; exprimer ,en fonction de z, l'affixe z' du point M'= f(M) .

Théorème

- Si $f = S(\Omega,k,\theta)$ alors la transformation complexe F associée à f est définie par :

$$F : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z' = az + b \end{array}$$

Où : $a = [\,k, \theta]$ et $b = (\,1 - a\,)z_0$ $\quad$ ($z_0 = \text{aff}(\Omega)$)

- Soient a et b deux nombres complexes tels que $a \notin \{0,1\}$. L'application de P dans lui même qui à tout M(z) associe M'(z') tel que : $z' = az + b$, est la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ

avec : $z_0 = \dfrac{b}{1-a}$, $\; k = |a|$ et $\theta \equiv \text{Arg}(a)\,[2\pi]$

Exercice

Déterminer la transformation complexe associée à f
dans chacun des cas suivants :

1) $f = S(A, 2, \frac{\pi}{4})$ avec $A(1 + i)$

2) f est la similitude directe transformant $A(1 – i)$ en $C(5 + i)$
et $B(2i)$ en $D(-1 – i)$.
Déduire alors les éléments caractéristiques de f.

V. Les similitudes indirectes

1° / Centre d'une similitude indirecte

Activité

Soit g une similitude indirecte de rapport $k \neq 1$.

On pose f = gog

a) Montrer que f admet un unique point invariant Ω.

b) On pose $\Omega' = g(\Omega)$. Etablir l'égalité : $\Omega\Omega' = k\Omega\Omega'$ et en déduire que $\Omega' = \Omega$.

c) On suppose qu'il existe un point I invariant par g ; montrer que $I = \Omega$.

Théorème

Toute similitude indirecte, de rapport différent de 1, admet un unique point invariant Ω appelé centre de la similitude.

2° / Forme réduite d'une similitude indirecte

Activité

Soit g une similitude indirecte de centre Ω et de rapport $k \neq 1$. On désigne par h l'homothétie de centre Ω et de rapport k et on pose $\varphi = h^{-1} o g$.

a) Préciser $\varphi(\Omega)$ et en déduire que φ est une symétrie axiale, on note Δ l'axe de φ.

b) En déduire que $g = hoS_\Delta$

c) On pose $\Psi = (S_\Delta oh)^{-1} o (hoS_\Delta)$.
Montrer que pour tout $M \in \Delta$, $\Psi(M) = M$.

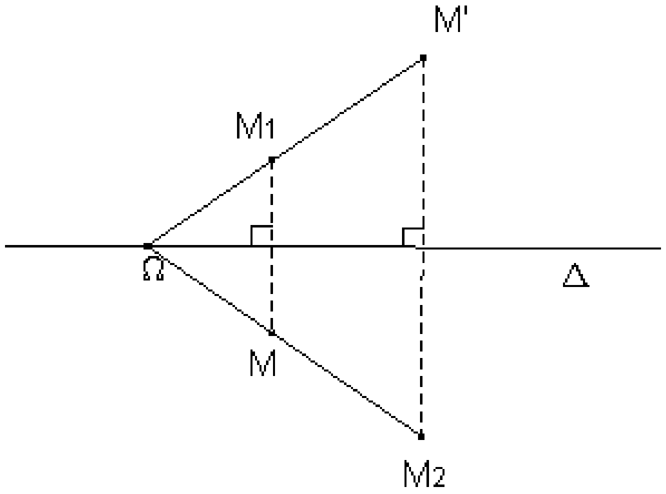
d) Caractériser alors Ψ et en déduire que : $hoS_\Delta = S_\Delta oh$

e) Prouver l'unicité de la décomposition précédente .

Théorème

Toute similitude indirecte g de centre Ω et de rapport $k \neq 1$, se décompose d'une manière unique sous la forme :
$g = h \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h$; où h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k et S_Δ est la symétrie orthogonale d'axe Δ passant par Ω.
Cette décomposition est appelé forme réduite de g.

<u>*Vocabulaire :*</u> **une similitude indirecte g de rapport différent de 1 est caractérisée par son centre, son rapport et son axe ; ceux si sont appelés les <u>éléments caractéristiques</u> de g.**



Retenons :

* L'axe $\Delta = \{ M \in P$ tel que : $g(M) = h(M) \}$

$= \{ M \in P$ tel que : $\overrightarrow{\Omega g(M)} = k\overrightarrow{\Omega M} \}$

* gog est l'homothétie de centre Ω et de rapport k^2

* Δ porte la bissectrice intérieure de $\widehat{M\Omega M'}$

Justifier ces résultats.

3° / Similitudes indirectes et nombres complexes

Activité

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{v_0})$.

1) Caractériser l'application S de P dans lui-même qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = \bar{z}$.

2) a et b étant deux nombres complexes tel que $a \neq 1$; caractériser l'application f de P dans lui-même qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = az + b$.

3) On pose $g = f \circ S$.

a) Préciser la nature de g.

b) Déterminer la forme complexe associée à g.

c) Montrer que g admet un unique point invariant Ω d'affixe

$$z_0 = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}.$$

Théorème

Une application g du plan P dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') est une similitude indirecte de centre $\Omega(z_0)$ et de rapport $k \neq 1$ si et seulement si il existe deux nombres complexes a et b tel que $z' = a\bar{z}+b$.

Dans ce cas $k = |a|$ et $z_0 = \dfrac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$.