

Déplacements & antidéplacements

I. Classification des isométries

1) Activité :

Dans le plan orienté, on considère trois points A, B et C d'images respectives A', B' et C' par une isométrie f.

a) Exprimer $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en fonction de AB, AC et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) Exprimer $\cos(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ en fonction de A'B', A'C' et $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$.

c) En déduire l'égalité :

$$\cos(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

Que peut on conclure pour $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$?

2) Définition :

Soit f une isométrie du plan.

- f est un déplacement si et seulement elle conserve les mesures des angles orientés.
- f est un antidéplacement si et seulement elle transforme les mesures des angles orientés en leurs opposés

3) Application :

a) Etant donnés quatre points A, B, C et D deux à deux distincts d'images respectives A', B', C' et D' par une isométrie f.

Comparer $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ dans chacun des cas suivants :

$$* f = S_{\Delta} \quad * f = R_{(I, \alpha)} \quad * f = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$$

b) Compléter le tableau suivant :

f	Déplacement	antidéplacement
Rotation		
Symétrie orth		
Translation		
Symétrie gliss		

4) Récapitulation :

Un déplacement	Un antidéplacement
➤ Est la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales	➤ Est la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales
➤ Se ramène à la composée de deux symétries orthogonales	➤ Se ramène à la composée de trois symétries orthogonales
➤ Transforme tout repère orthonormé direct en un repère orthonormé direct	➤ Transforme tout repère orthonormé direct en un repère orthonormé indirect
➤ Conserve les mesures des angles orientés	➤ Transforme les mesures des angles orientés en leurs opposés
➤ Est une translation ou une rotation	➤ Est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante

II. Angle d'un déplacement

1) Activité

Soient A et B deux points distincts d'images respectives A' et B' par un déplacement f. On

pose $\theta \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})[2\pi]$ et on se propose de

démontrer que θ ne dépend que de f non pas du choix de A et B.

Soient C et D deux points distincts d'images respectives C' et D' par f.

Etablir l'égalité :

$$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})[2\pi]$$

Conclure.

Commentaire :

L'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ est appelé angle du déplacement f. Toute mesure θ de

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ est dite angle de f.

2) Application :

Préciser l'angle du déplacement f dans chacun des cas suivants :

* $f = t_{\vec{u}}$ * $f = R_{(I, \alpha)}$ * $f = S_I$ * $f = id_P$

3) Théorème:

- La composée de deux déplacements et un déplacement d'angle la somme des angles.
- La réciproque d'un déplacement d'angle α est un déplacement d'angle $(-\alpha)$

Justifier les résultats précédents

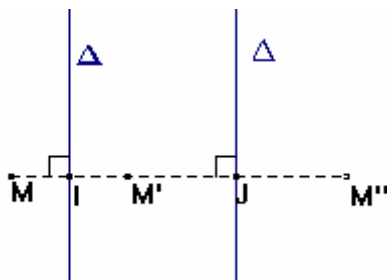
III. Décomposition d'un déplacement

1) Translation :

Activité N°1

On considère deux droites parallèles Δ et Δ' et un point M du plan.

On pose $M' = S_{\Delta}(M)$ et $M'' = S_{\Delta'}(M')$.



- Préciser $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}(M)$
- On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[MM']$ et $[M'M'']$.
Exprimer $\overline{MM''}$ en fonction de \overline{IJ} .
- Montrer que le vecteur $2\overline{IJ}$ ne dépend pas du choix du point M .
Conclure

Retenons : Si $\Delta // \Delta'$ alors $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = t_{2\overline{IJ}}$ où I est un point quelconque de Δ et J est son projeté orthogonale sur Δ' .

Activité N°2

Etant donné un vecteur \vec{u} , en s'inspirant du résultat précédent déterminer une décomposition de la translation de vecteur \vec{u} en deux symétries orthogonales. Cette décomposition est elle unique ?

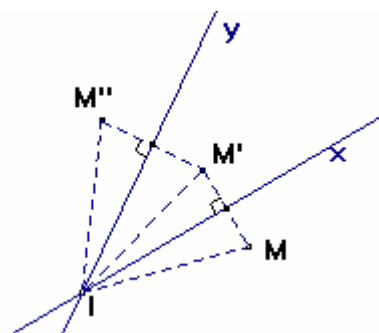
Retenons : Toute translation $t_{\vec{u}}$ se décompose, d'une infinité de manières, en deux symétries orthogonales $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ où Δ est une droite arbitraire vérifiant $\vec{u} \perp \text{dir}(\Delta)$ et $\Delta' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$

2) Rotation :

Activité N°1

On considère deux droites (Ix) et (Iy) sécantes en un point I et un point M du plan.

On pose $M' = S_{(Ix)}(M)$ et $M'' = S_{(Iy)}(M')$



- Etablir l'égalité: $IM = IM''$
- Exprimer $(\overline{IM}, \widehat{IM''})$ en fonction de $(\overline{Ix}, \widehat{Iy})$
- Conclure.

Retenons : $S_{(Iy)} \circ S_{(Ix)} = R_{(I, 2(\widehat{Ix}, \widehat{Iy}))}$

Activité N°2

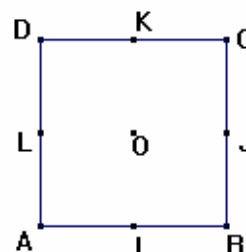
Etant donné un point I et un réel α , en s'inspirant du résultat précédent déterminer une décomposition de la rotation de centre I et d'angle α en deux symétries orthogonales. Cette décomposition est elle unique ?

Retenons : Toute rotation $R_{(I, \alpha)}$ se décompose, d'une infinité de manières, sous la forme

$R_{(I, \alpha)} = S_{(Iy)} \circ S_{(Ix)}$ avec $(\overline{Ix}, \widehat{Iy}) \equiv \frac{\alpha}{2}[\pi]$

Exercice:

- Déterminer la forme réduite de $S_{(IL)} \circ S_{(AB)}$, $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$, $S_{(JK)} \circ S_{(AD)}$, $S_{(JL)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$ et $S_{(BD)} \circ S_{(AB)}$
- Décomposer en deux symétries orthogonales : $R_{(A, \pi/2)}$, $t_{\overline{AB}}$, S_O



3) Classification des déplacements

Soit f un déplacement ; Δ et Δ' deux droites tel que $f = S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}$. Le tableau suivant détermine la nature, l'angle et l'ensemble des points invariants par f suivant la position relative de Δ et Δ' .

Position relative de Δ et Δ'	Nature de f	Angle de f	Ensemble des points invariants
$\Delta = \Delta'$	Identité	$2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	Le plan P
$\Delta // \Delta'$ et $\Delta \neq \Delta'$	Translation de vecteur non nul	$2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	\emptyset
$\Delta \perp \Delta'$ et $\Delta \cap \Delta' = \{I\}$	S_I	$\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\{I\}$
$\Delta \cap \Delta' = \{I\}$ et $(\vec{u}_{\Delta}, \vec{u}_{\Delta'}) \equiv \alpha [\pi]$	$R_{(I, 2\alpha)}$	$2\alpha \neq 2k\pi$	$\{I\}$

IV. Détermination d'une isométrie

Activité

Soient A, B, A' et B' quatre points du plan vérifiant: $AB = A'B'$ et $AB \neq 0$.

1) On désigne par α une mesure de l'angle $(\overline{AB}, \overline{A'B'})$ et par R la rotation de centre A et d'angle α .

- a) On pose $C = R(B)$. Montrer que $ACB'A'$ est un parallélogramme .
- b) En déduire $f(A)$ et $f(B)$ où $f = t_{\overline{AA'}} \circ R$.
- c) On suppose qu'il existe un autre déplacement f' tel que $f'(A) = A'$ et $f'(B) = B'$ et on pose $\varphi = f' \circ f^{-1}$
Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$.
En déduire que $f' = f$.

- 2) On pose $g = S_{(A'B')} \circ f$
 - a) Quelle est la nature de g ?
 - b) Déterminer $g(A)$ et $g(B)$.
 - c) Montrer que g est l'unique antidéplacement qui envoie A en A' et B en B' .

Théorème :

Si A, B, A' et B' sont quatre points du plan vérifiant : $AB = A'B'$ & $AB \neq 0$ alors

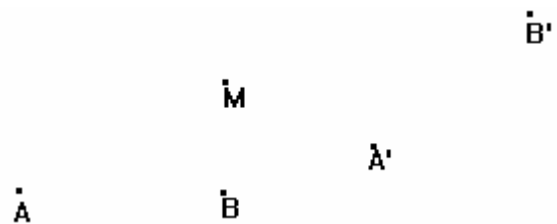
- Il existe un unique déplacement f vérifiant $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.
- Il existe un unique antidéplacement g vérifiant : $g(A) = A'$ et $g(B) = B'$.

N.B.: Le théorème précédent prouve les assertions suivantes :

- Un déplacement est parfaitement déterminé par son action sur deux points distincts.
- Un antidéplacement est parfaitement déterminé par son action sur deux points distincts.

Exercice N°1:

On considère les points suivants :

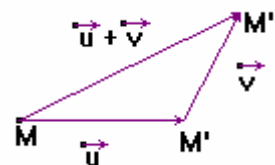


- a) Construire le point M' image du point M par le déplacement f qui transforme A en A' et B en B' .
- b) Construire le point M'' image du point M par l'antidéplacement g qui transforme A en A' et B en B' .

V. Composition des isométries :

1) Translations

On rappelle que : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v} + \vec{u}} = \dots$



2) Rotations de même centre

On rappelle que : $R_{(I, \alpha)} \circ R_{(I, \beta)} = \dots$

