Isométries planes

I. Composition de symétries orthogonales

1) *Translation*

Activité N°1

On considère deux droites parallèles Δ et Δ' et un point M du plan.
On pose $M' = S_{\Delta}(M)$ et $M'' = S_{\Delta'}(M')$.

a) Préciser $S_{\Delta'} o S_{\Delta}(M)$

b) On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [MM'] et [M'M''].
Exprimer $\overrightarrow{MM''}$ en fonction de $\overrightarrow{IJ}$.

c) Montrer que le vecteur $2\overrightarrow{IJ}$ ne dépend pas du choix du point M.

Conclure.

<u>Retenons</u> :

Si $\Delta // \Delta'$ alors $S_{\Delta'} o S_{\Delta} = t_{2\overrightarrow{IJ}}$ où I est un point quelconque de Δ et J est son projeté orthogonale sur Δ'.

Activité N°2

Étant donné un vecteur $\vec{u}$, en s'inspirant du résultat précédent déterminer une décomposition de la translation de vecteur $\vec{u}$ en deux symétrie orthogonales.

Cette décomposition est elle unique ?

<u>Retenons :</u>

Toute translation se décompose, d'une infinité de manières, en deux symétries orthogonales $S_{\Delta'} o S_{\Delta}$ où Δ est une droite arbitraire vérifiant:
$\vec{u} \perp dir(\Delta)$ et $\Delta' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$

2) *Rotation*

Activité N°1

On considère deux droites (Ix) et (Iy) sécantes en un point I et un point M du plan.

On pose $M' = S_{(Ix)}(M)$ et $M'' = S_{(Iy)}(M')$

a) **Établir l'égalité: $IM = IM''$**

b) **Exprimer $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM''})$ en fonction de $(\overrightarrow{Ix}, \overrightarrow{Iy})$**

c) **Conclure.**

Retenons :

$$S_{(Iy)} o S_{(Ix)} = R_{(\,I,\,2(\overrightarrow{Ix},\overrightarrow{Iy}))}$$

Activité N°2

Étant donnés un point I et un réel α, en s'inspirant du résultat précédent déterminer une décomposition de la rotation de centre I et d'angle α en deux symétries orthogonales.

Cette décomposition est elle unique ?

Retenons : **Toute rotation $R_{(I,\alpha)}$ se décompose, d'une infinité de manières, sous la forme**

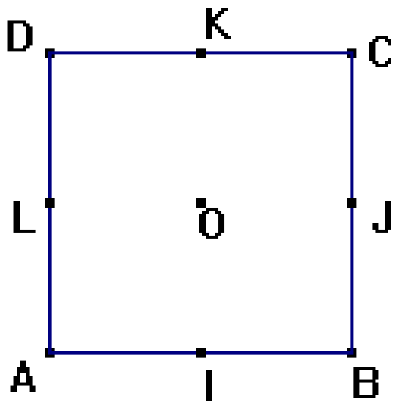
$R_{(I,\alpha)} = S_{(Iy)} o S_{(Ix)}$ avec $2(\overrightarrow{Ix}, \overrightarrow{Iy}) \equiv \alpha\ [2\pi]$

Exercice

1) Déterminer la forme réduite de

$S_{(JL)}oS_{(AB)}$, $S_{(AC)}oS_{(AB)}$, $S_{(JK)}oS_{(AD)}$

$S_{(AB)}oS_{(AD)}$ et $S_{(BD)}oS_{(AB)}$



2) Décomposer en deux symétries

orthogonales : $R_{(A,\pi/2)}$, , S_{O}

II. *Symétrie glissante*

Activité N°1

Soient dans le plan P une droite Δ et un vecteur non nul $\vec{u}$ directeur de Δ.

On se propose dans cette activité d'étudier l'application $f = t_{\vec{u}} o S_{\Delta}$.

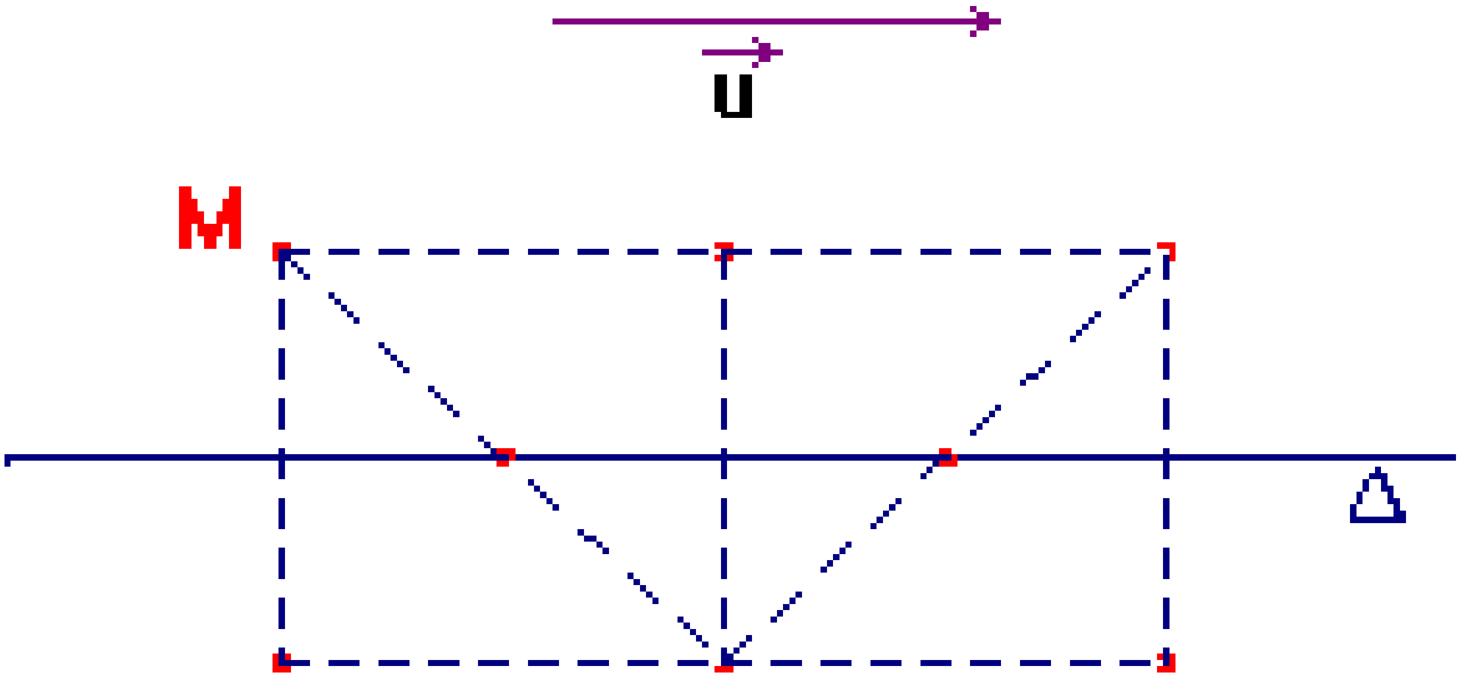
Soit M un point du plan, on pose : $M_1 = S_{\Delta}(M)$ et $M' = t_{\vec{u}}(M_1)$.

1) a) Préciser f(M).

b) On pose $M_2 = t_{\vec{u}}(M)$.

Quelle est la nature du quadrilatère $MM_1M'M_2$?

c) En déduire que : $t_{\vec{u}} o S_{\Delta} = S_{\Delta} o t_{\vec{u}}$.



u
M
Δ

2) On suppose qu'il existe un point M du plan invariant par f.

a) Montrer que : $\overrightarrow{M_1M} = \vec{u}$

b) En déduire que f n'admet aucun point invariant.

3) a) Montrer que f est bijective.

b) Caractériser l'application réciproque f^{-1}

4) Montrer que $f \circ f = t_{2\vec{u}}$.

5) Montrer que pour tout point M du plan, d'image M' par f, on a : $M^*M' \in \Delta$.

2/ Définition

Soient dans le plan P une droite Δ et un vecteur non nul $\vec{u}$ directeur de Δ. On appelle symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$, la composée commutative

$f = t_{\vec{u}} o S_{\Delta} = S_{\Delta} o t_{\vec{u}}$

Pour déterminer les éléments caractéristiques de f (l'axe et le vecteur) on peut utiliser les propriétés établies dans l'activité N°1 :

- $fof = t_{2\vec{u}}$
- si $M' = f(M)$ alors $M*M' \in \Delta$.
- $\Delta = \{ M \in P \ / \ t_{\vec{u}}(M) = f(M) \}$

3/ Activité N°2

Soient une droite Δ et un vecteur $\vec{u}$ non nul

. On suppose que : $t_{\vec{u}} o S_{\Delta} = S_{\Delta} o\, t_{\vec{u}}$

et on se propose de montrer que $\vec{u}$ est un

vecteur directeur de Δ.

Soit M un point de Δ, on pose : $M' = t_{\vec{u}}(M)$

a) Montrer que $M' \in \Delta$.

b) Conclure.

4/ Propriété

A partir des activités N°1 et N°2 en déduit la propriété suivante :

Étant donné une droite Δ et un vecteur non nul $\vec{u}$

$$\mathbf{t_{\vec{u}} o S_{\Delta} = S_{\Delta} o t_{\vec{u}}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ

5/ Exercice N°1

On considère un rectangle ABCD et un point M du plan. Les symétries orthogonales d'axes respectifs (AB), (BC) et (CD) transforment respectivement M en M_1, M_1 en M_2 et M_2 en M_3

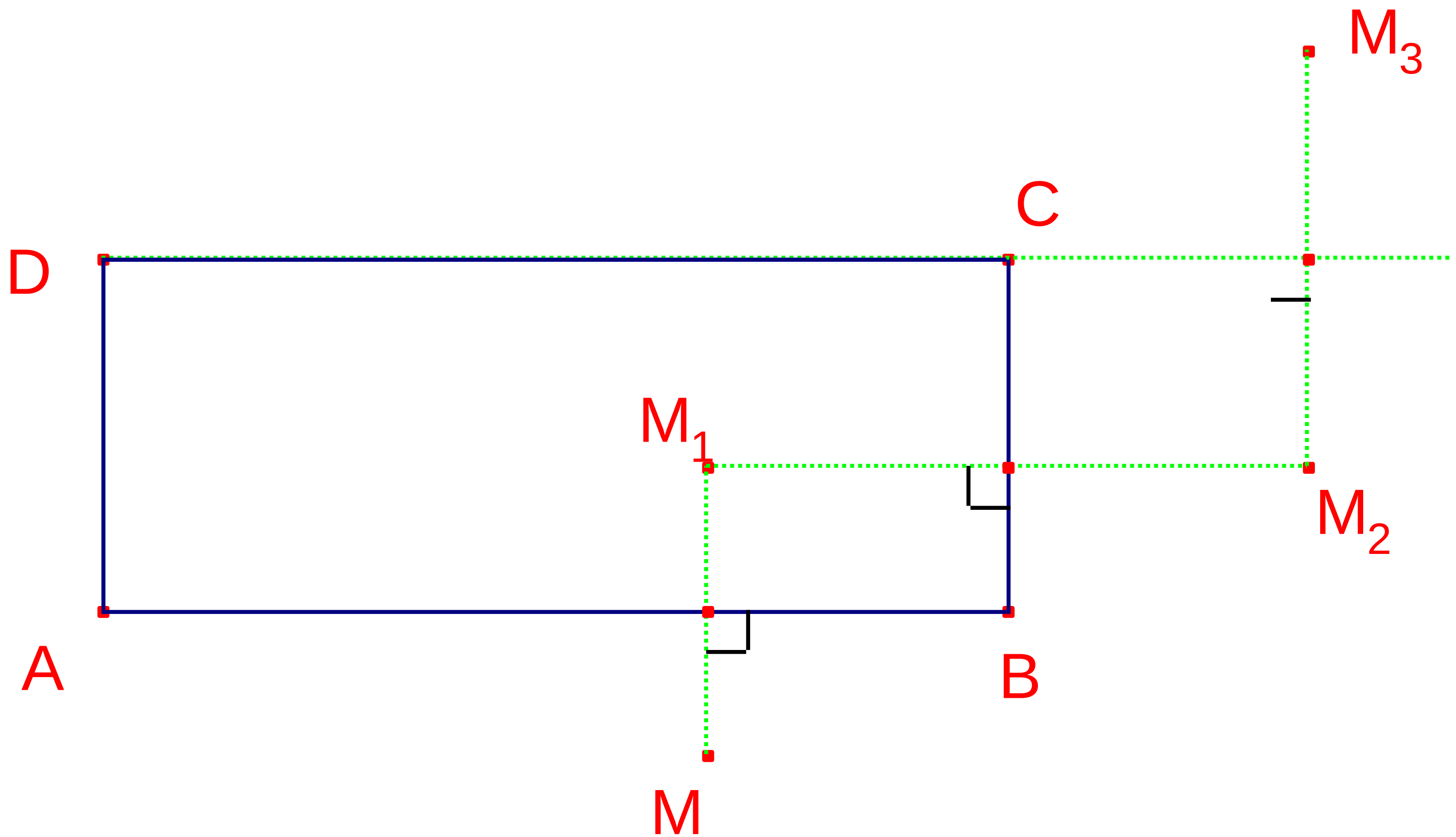
1) On pose : $f = S_{(CD)} o S_{(BC)} o S_{(AB)}$

   a) Préciser f(M).

   b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) Quel est l'ensemble des milieux du segment $[MM_3]$ lorsque M varie dans le plan ?

.


M3
C
D
M1
M2
A
B
M

III. Isométrie plane

1) Définition

Une application f du plan dans le plan est une isométrie si et seulement si elle conserve les distances.

i.e : pour tous M et N du plan d'images respectives M' et N' par f on a : M'N' = MN.

Application

f	Isométrie	N'est pas une isométrie
Translation		
Homothétie		
Rotation		
Symétrie axiale		
Symétrie centrale		
Projection		
Symétrie glissante		

Propriété

La composée de deux isométries est une isométrie.

Justifier le résultat énoncé dans cette propriété.

2/ Exercice N°2

A. Soit f l'application du plan P dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que : $z' = i\bar{z} + 1 - i$

1) Montrer que f est une isométrie.

2) Déterminer l'ensemble Δ des points invariants par f.

3) Montrer que pour tout $M \in P$, d'image M' par f, on a :

   a) $M*M' \in \Delta$.

   b) $(MM') \perp \Delta$.

   c) Caractériser alors f.

B. Soit g l’application de P dans P qui à tout point M(z) associe le point M’(z’) tel que : $z' = i\,\overline{z} + 2$

a) Montrer que g est une isométrie.

b) Déterminer l’ensemble des points invariants par g

c) Montrer que gog est une translation dont on précisera le vecteur $\vec{v}$.

d) On pose $f = t_{\vec{u}} o g$ avec $\vec{v} = -2\vec{u}$.

1. Donner la transformation complexe associé à f.
2. Caractériser f.
3. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

3/ Activité N°3

Soit f une application du plan dans le plan . On désigne par A, B et C trois points du plan d'images respectives A', B' et C' par f.

1) On suppose que f est une isométrie.

a) En remarquant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, exprimer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de AB^2, AC^2 et BC^2.

b) Exprimer $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$ en fonction de $A'B'^2$, $A'C'^2$ et $B'C'^2$.

c) En déduire l'égalité : $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

On dit que f **conserve** le produit scalaire.

2) On suppose que f conserve le produit scalaire.

En posant B = C , déduire que f est une isométrie.

On vient ainsi de démontrer le théorème suivant :

Théorème

Soit f une application du plan dans le plan.

f est une isométrie du plan

si et seulement si

elle conserve le produit scalaire.

4/ **Propriété**

Soit f une isométrie du plan . On désigne par A, B et C trois points du plan d'images respectives A', B' et C' par f et par x un réel.

$$\text{Si} \quad \overrightarrow{AC} = x\,\overrightarrow{AB} \quad \text{alors} \quad \overrightarrow{A'C'} = x\,\overrightarrow{A'B'}$$

Prouver ce résultat.

Conséquences

A justifier et à retenir :

- Toute isométrie conserve le milieu.
- Toute isométrie conserve le barycentre de deux points pondérés.
- Toute isométrie conserve l'alignement
- Si une isométrie laisse invariants deux points distincts A et B alors elle laisse invariant tout point M de la droite (AB).
- Toute isométrie conserve l'équipollence.

  i.e : si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{A'B'}$

5/ Activité N°4

Soient f une isométrie du plan et $\mathcal{R}=(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ un repère orthonormé du plan. A’, B’ et C’ les images respectives des points A, B et C par f.

1) Montrer que $\mathcal{R}'=(A',\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$ est un repère orthonormé du plan.
2) Montrer que si un point M a pour coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$ alors son image M’ par f a les mêmes coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}'$.
3) En déduire que f est bijective.
4) Montrer que la réciproque f^{-1} est une isométrie.

Théorème

Toute isométrie du plan est une

bijection

dont la réciproque est une isométrie.

N.B : A partir de la propriété 4/ on peut prouver le résultat suivant :

A', B', C',D',E' et F' étant les images respectives des points A,B,C,D,E et F par une isométrie f , x et y étant des réels donnés.

Si

$$\overrightarrow{\mathbf{EF}} = \mathbf{x}\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \mathbf{y}\overrightarrow{\mathbf{CD}}$$

Alors

$$\overrightarrow{\mathbf{E'F'}} = \mathbf{x}\overrightarrow{\mathbf{A'B'}} + \mathbf{y}\overrightarrow{\mathbf{C'D'}}$$

IV. Caractérisation d’une isométrie

On se propose dans cette Partie de caractériser une isométrie f à partir de son ensemble de points invariants .

1^{ièr} cas

f fixe trois points non alignés

On suppose que f fixe trois points non alignés A, B et C. Soit M un point quelconque du plan en exprimant $\overrightarrow{AM}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, déduire que M est invariant par f.

Théorème

Si une isométrie f fixe trois points **non alignés**

alors

$$f = id_P$$

Corollaire

Si deux isométries f et g coïncident en trois points **non alignés** alors $f = g$

Prouver ce corollaire (on pourra poser $\varphi = g^{-1} o f$ et montrer que $\varphi = id_P$)

NB : On dit ainsi qu'une isométrie est parfaitement déterminée par les images de trois points non alignés.

<u>$2^{\text{ième}}$ cas</u>

f fixe deux points distincts et $f \neq id_P$

On suppose dans cette partie que f fixe deux points distincts A et B et que $f \neq id_P$

Rappelons d'abord que f fixe tout point de la droite (AB) (Voir conséquences II. 4/)

Soit C un point non situé sur (AB) et désignons par C' l'image de C par f.

1/

a) Montrer que $C' \neq C$

b) Montrer que $(AB) = \text{med}[CC']$

2/ On pose $\varphi = S_{(AB)} o f$

a) Déterminer $\varphi(A)$, $\varphi(B)$ et $\varphi(C)$.

Que peut on conclure pour φ ?

b) En déduire que $f = S_{(AB)}$

Théorème

Si une isométrie $f \neq id_P$ **fixe deux points distincts** A et B alors f est la symétrie orthogonale d'axe (AB).

<u>NB :</u> dans ce qui précède on vient de démontrer le résultat suivant :

Si A est un point du plan d'image A'$\neq$ A par une isométrie f

alors

tout point fixe M par f, s'il existe, est situé sur med[AA'].

3^{ième} cas

f admet un unique point invariant

On suppose que f admet un unique point invariant I.
Soit A un point du plan distinct de I et désignons par A' l'image de A par f
(on a évidemment $A' \neq A$ puisque $A \neq I$ et I est l'unique point fixe par f) .

On pose $\varphi = S_{\Delta} o f$ où $\Delta = med[AA']$

a) Préciser $\varphi(I)$ et $\varphi(A)$.
b) Caractériser φ.
c) En déduire que f est une rotation de centre I.

Théorème

Si une isométrie f admet un **unique point fixe** I alors f est une rotation de centre I.

<u>4$^{\text{ième}}$ cas</u>

f n'admet aucun point invariant

On suppose dans cette partie que f n'admet aucun point invariant.

Soit A un point du plan d'image A' par f

(on a évidemment A'≠A), on pose $\varphi = t_{\overrightarrow{A'A}} \circ f$.

a) Préciser φ(A).

b) Montrer que φ ne peut pas être une rotation d'angle non nul.

c) En déduire que φ est soit l'identité, soit une symétrie orthogonale

d) En déduire alors que f est soit une translation de vecteur non nul soit une symétrie glissante.

<u>**Théorème**</u>

Si f est une isométrie qui n’admet **aucun point fixe**

alors

f est soit une translation de vecteur non nul soit une symétrie glissante.

De ce qui précède en déduit le résultat suivant :

Théorème

Une application f du plan dans lui même est une isométrie

si et seulement si

f est une translation ou une rotation ou une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante.

Conséquence

Toute isométrie est la composée d’au plus trois symétries orthogonales.

Retenons

Si ABC et A'B'C' sont deux triangles isométriques

alors

il existe une unique isométrie f tel que f(A) = A', f(B) =B' et f(C) = C'.

Prouver ce résultat.

<u>**Exercice N°4**</u>

Déterminer toutes les isométries qui laissent invariant un carré ABCD de centre I et de sens direct.

Exercice N°5

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC équilatéral direct de centre G. Soit r la rotation de centre G et d'angle $\pi/3$.

On pose A' = r(A), B' = r(B) et C' = r(C).

1) Quel est le centre du triangle A'B'C' ?
2) Soit f une isométrie transformant {A,B,C} en {A',B',C'}
   a) Montrer que f(G) = G
   b) Déterminer toutes les isométries transformant {A, B, C} en {A', B', C'}.

Suite

3) Soit A''B''C'' un triangle équilatéral de centre G'' et tel que : $\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{G''A''}$

Quelle est l'image du triangle ABC par l'isométrie $t_{\overrightarrow{GG''}} \circ r$?

4) Soit φ une isométrie transformant {A,B,C} en {A'',B'', C''}

a) Montrer que φ(G) = G''.

b) Déterminer toutes les isométries φ transformant {A,B,C} en {A'', B'', C''}

Exercice N°6

Soit ABC un triangle équilatéral direct .

1) Déterminer toutes les isométries f qui laissent globalement invariant le triangle ABC.

2) Soit $D=S_{(AC)}(B)$, on se propose de déterminer toutes les isométries f qui transforment ABC en ACD.

   a) On pose $g = S_{(AC)} of$ .Déterminer l'image par g du triangle ABC.

   b) En déduire toutes les isométries f.

Exercice N°7

Soit ABCD un losange non carré de centre I. Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des isométries qui laissent globalement invariant l'ensemble {A, B,C, D} On note f(I) = I'.

1/ a) Montrer que: $\overrightarrow{I'A} + \overrightarrow{I'B} + \overrightarrow{I'C} + \overrightarrow{I'D} = \vec{0}$.

b) En déduire que le point I est invariant par toute isométrie f $\in \mathscr{I}$.

2/ Soit f$\in\mathscr{I}$, montrer que f(A)$\in${B, D}.

3/ a) f$\in\mathscr{I}$ et f(A) = C ; montrer que $S_{(BD)}$of fixe les points A et I.

b) En déduire les éléments de I qui fixent le losange ABCD.

4/ Déterminer les éléments de $\mathscr{I}$ qui fixent le point A et en déduire que l'ensemble des isométries qui laissent globalement invariant le losange ABCD est $\mathscr{I} = \{ Id_P, S_{(AC)}, S_{(BD)}, S_I \}$.

Exercice N°8

Dans le plan oriente on considère un carré ABCD de sens direct et de centre O.

Soit A'B'C'D' le carré transformé de ABCD par la rotation de centre O et d'angle $\pi/4$.

1) Quel est le centre de A'B'C'D' ?

2) Soit f une isométrie transformant {A,B,C,D} en {A',B',C',D'}.

a) Montrer que f(O)=O.

b) En déduire les déplacements puis les antidéplacements transformant {A,B,C,D} en {A',B',C',D'}.