Dérivabilité

Cours élaboré par le prof: Chouihi

I. Dérivabilité en un point

Activité N°1

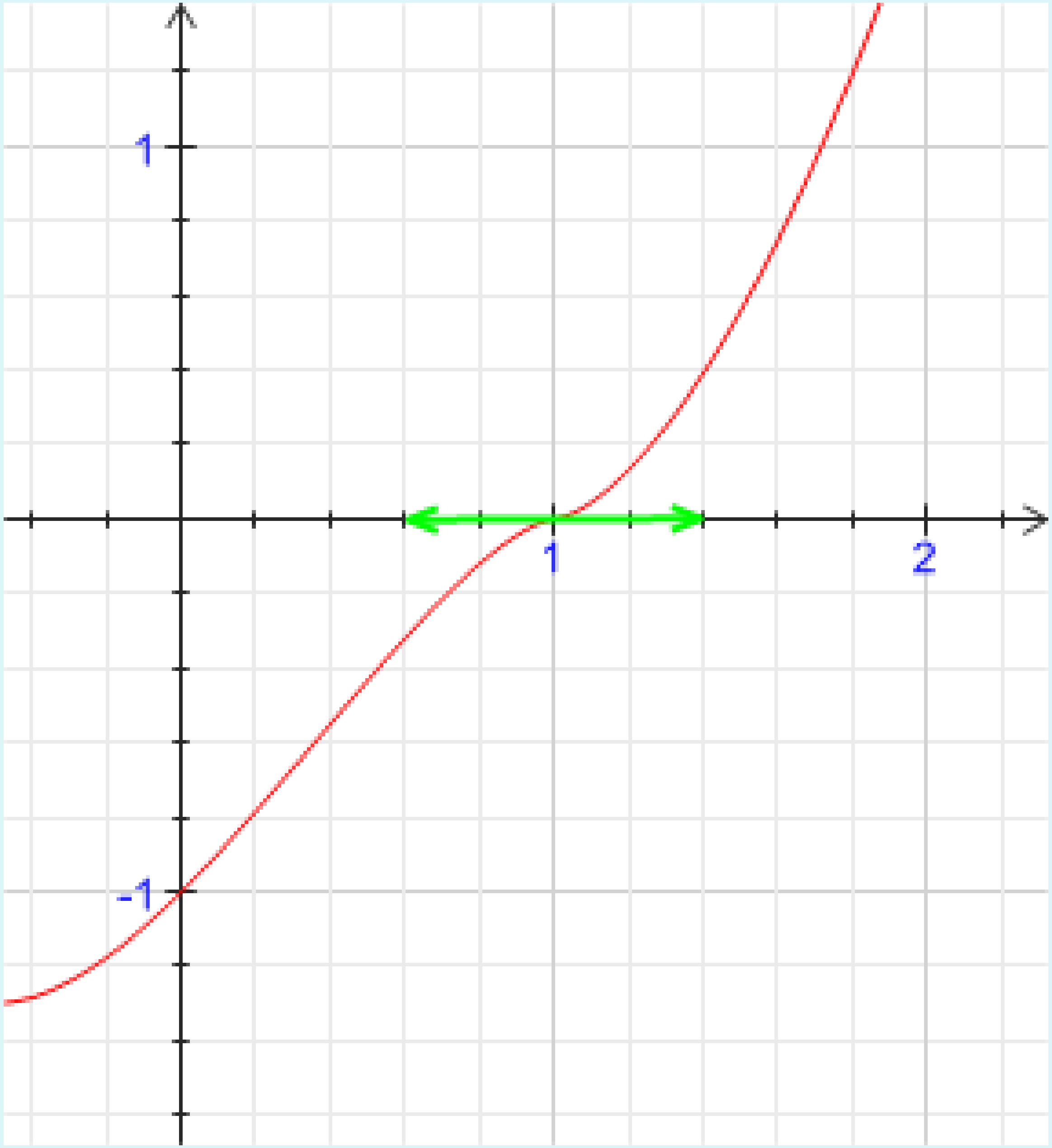
Soit f la fonction définie par $f(x) = (x-1)\sqrt{\left|x^2-1\right|}$

Pour tout $x \in IR \setminus \{1\}$ on pose $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

a) Etudier la limite de φ en 1.

b) Que peut-on conclure pour f ?

c) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.


1
-1
1
2

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
f est dite dérivable en x_0 si et seulement si l'expression
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0

Dans ce cas on note $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Le réel $f'(x_0)$ est appelé nombre dérivé de f au point x_0.

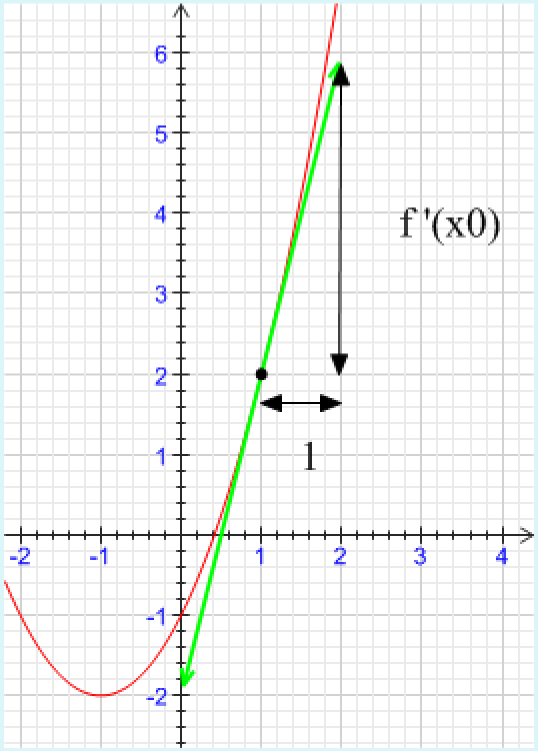
Le réel $f(x_0) + h.f'(x_0)$ est une approximation affine de $f(x_0 + h)$ et on écrit : $f(x_0 + h) = f(x_0) + h.f'(x_0)$, pour h voisin de 0.

Interprétation géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

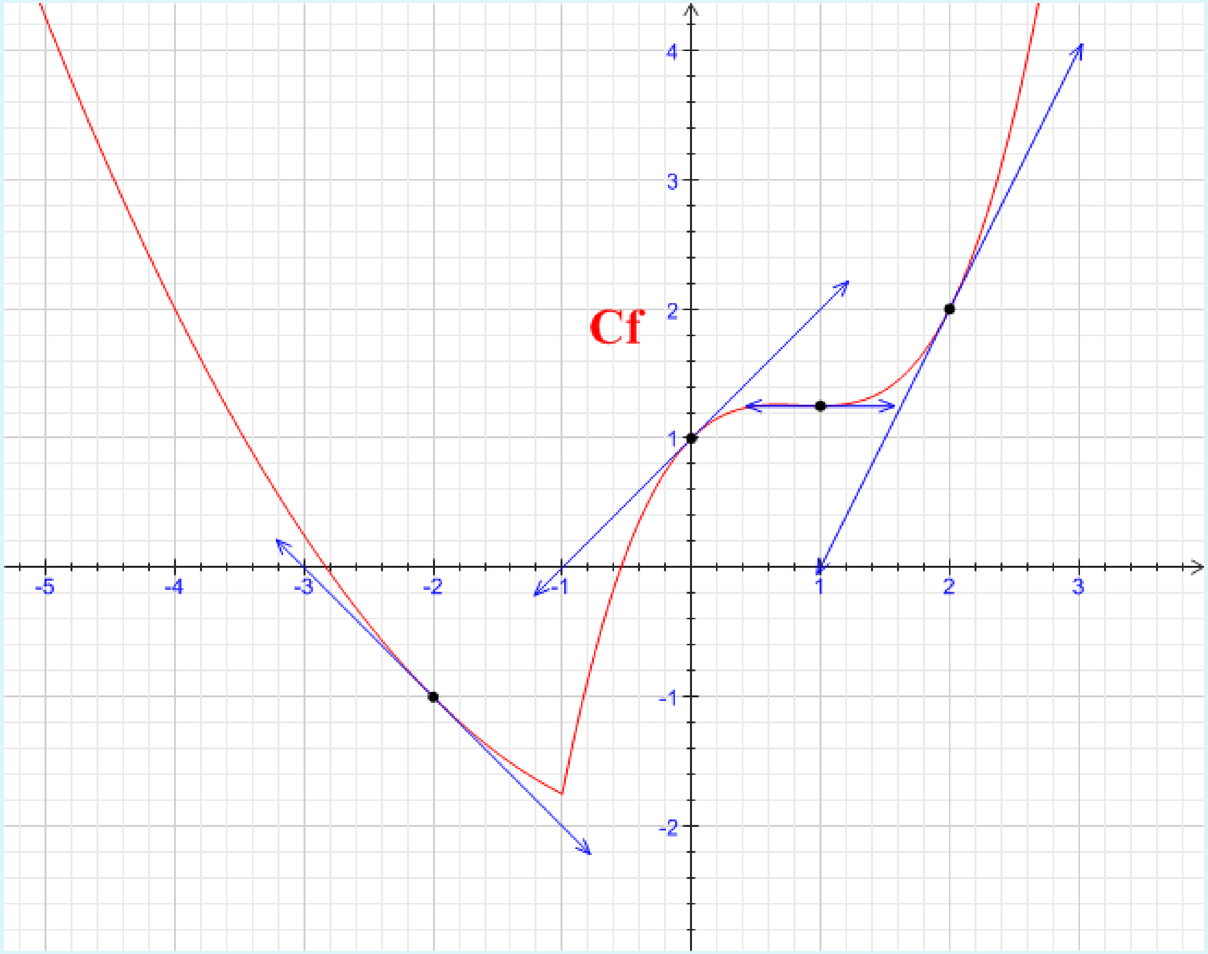
Si f est dérivable en x_0 alors la courbe C_f admet au point $M_0(x_0,f(x_0))$ une tangente T_0 d'équation : ……………

T_0 a pour vecteur directeur $\vec{u}$ =…….



Application N°1

1) Par lecture graphique, déterminer f’-2), f’(0), f’(1) et f’(2)
2) Donner une approximation affine de f(-2,001) , f(0,0001) et f(1,999)



Application N°2

1) Donner une approximation affine de $\dfrac{1}{(1+h)^2}$ pour h voisin de 0.

2) En déduire une estimation des réels $\dfrac{1}{(1,0000000002)^2}$ et $\dfrac{1}{(0,9999999998)^2}$

Activité

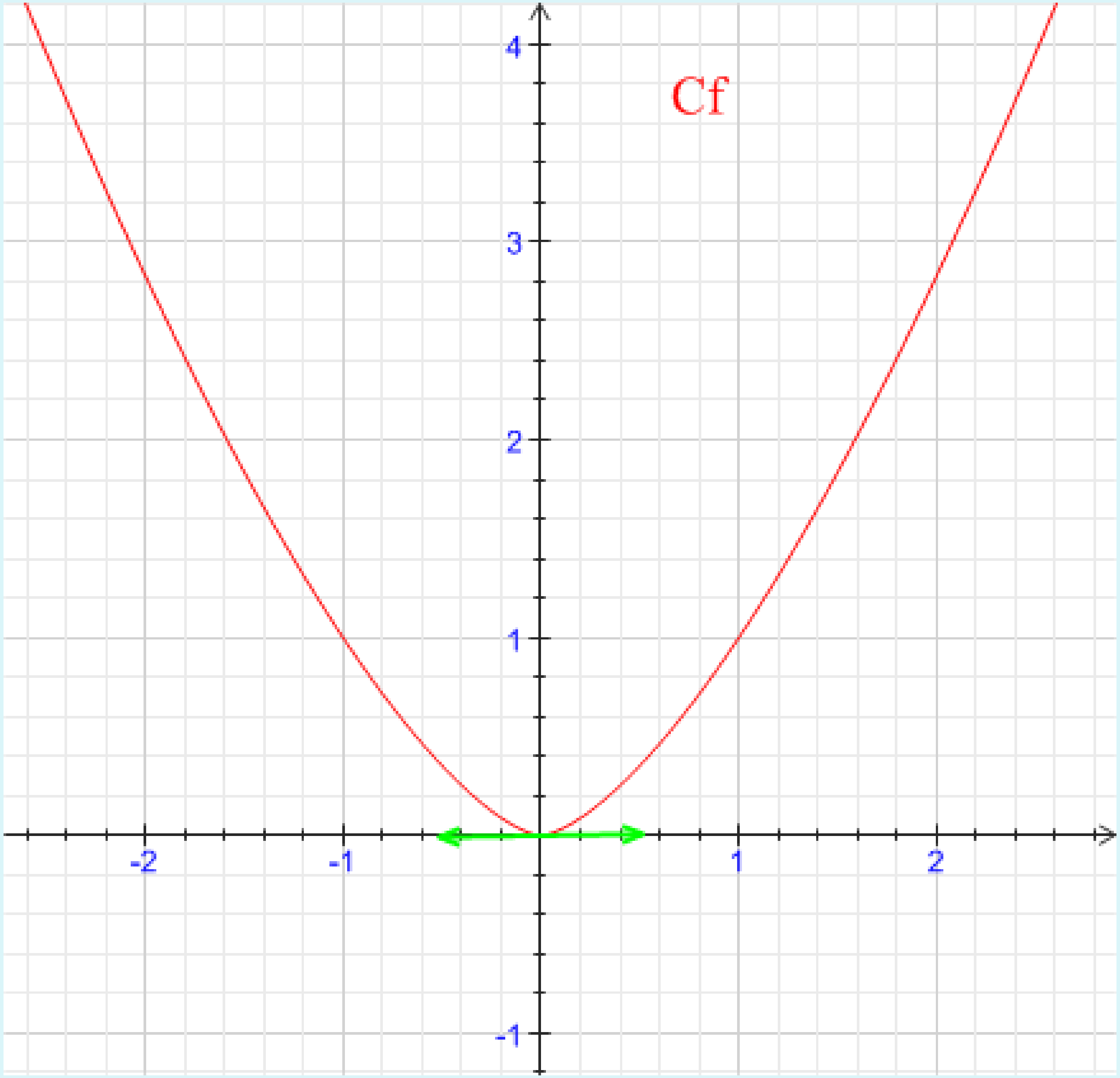
Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) Préciser D_f.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Que peut-on conclure pour la continuité de f en 0 ?

c) Enoncer le théorème concernant la relation entre la continuité et la dérivabilité.

d) La réciproque de ce théorème est elle vraie ? donner un contre exemple.



Cf
4
3
2
1
-1
-2
-1
1
2

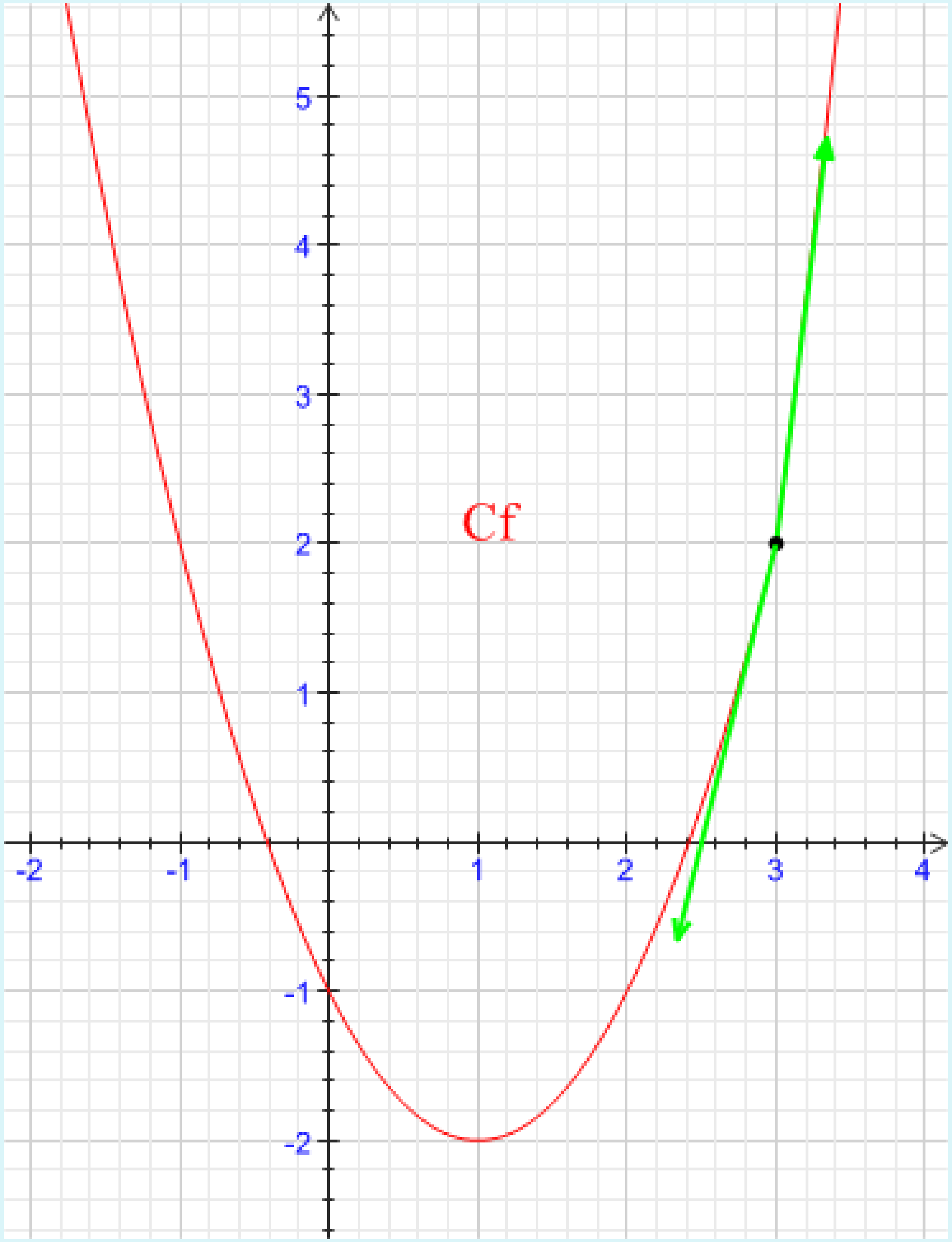
Activité

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 7 + 2|x - 3|$

a) **Etudier la dérivabilité de f en 3.**

b) **Interpréter graphiquement les résultats obtenus.**

c) **Tracer la courbe C_f dans un repère orthonormé.**



Cf
-2
-1
1
2
3
4
5

Théorème

Compléter

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et

$x_0 \in I$.

f est dérivable en x_0 si et seulement si

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Théorème

Compléter

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

f est dérivable en x_0 si et seulement si

$$\begin{cases} \text{f est dérivable à droite en } x_0 \\ \text{f est dérivable à gauche en } x_0 \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \end{cases}$$

Activité

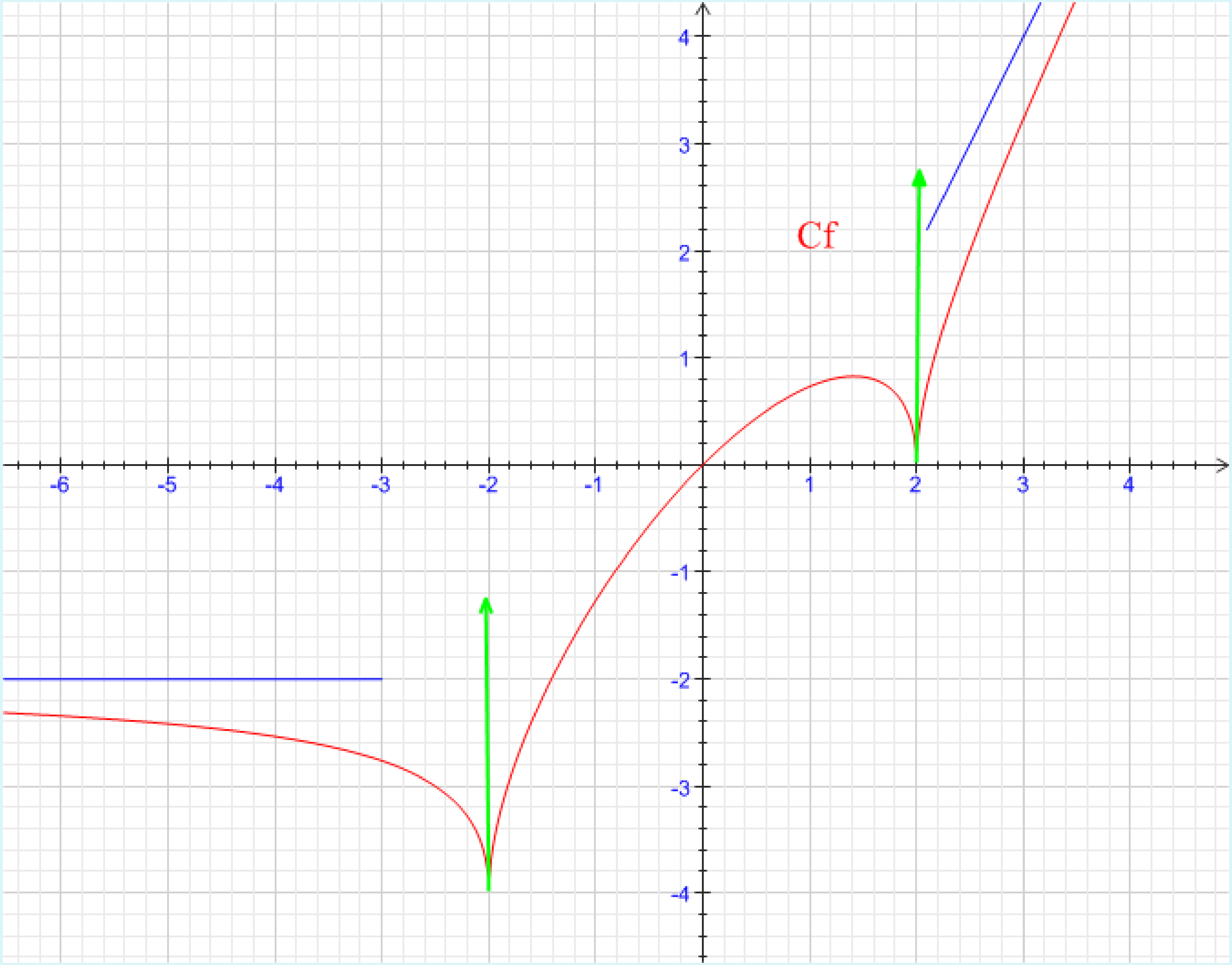
Soit f la fonction définie par $f(x) = (x-2) + \sqrt{\left|x^2 - 4\right|}$

a) Etudier la dérivabilité de f en 2.

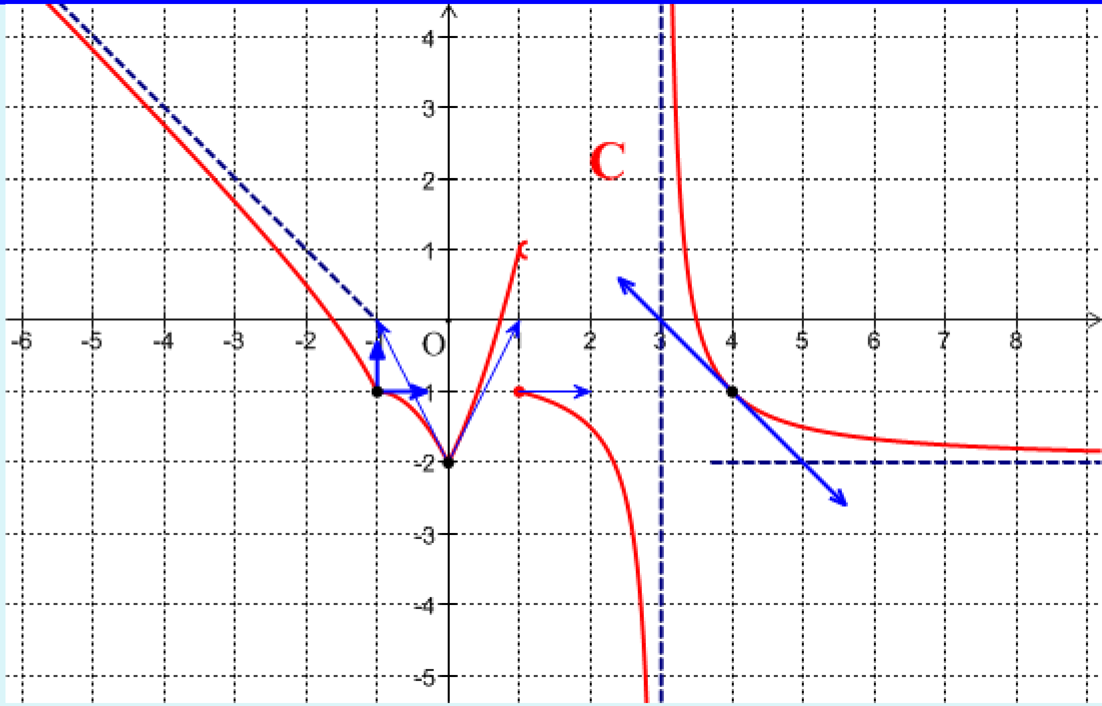
b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

c) Etudier la dérivabilité de f en -2.

d) Etudier les branches infinies de la courbe C de f.


Cf
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

Exercice



Dans la figure ci-contre on a représenté une fonction f dans un repère orthonormé.

Compléter:

1)) $D_f = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2) a) $f'(4) = \ldots$ b) $f_g'(0) = \ldots$

c) $f_d'(0) = \ldots$

d) f est elle dérivable en 0? ………. Justification:. ……

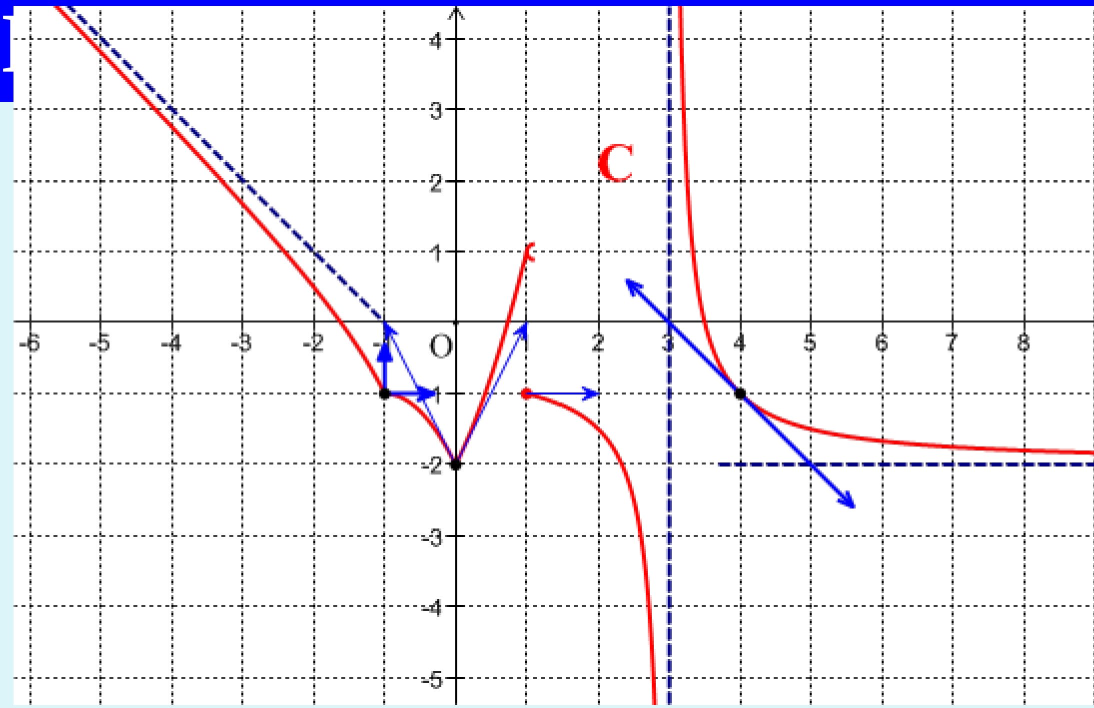
3) a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)+1}{x-1} = \ldots\ldots$

b) f est elle dérivable à gauche en 1? …… Justification:……

4) a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{f(x)+1}{x+1} = \ldots$ b) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{f(x)+1}{x+1} = \ldots$

5) La courbe de f admet trois asymptotes; déterminer leurs équations.

Dans la figure ci-contre on a représenté une fonction f dans un repère orthonormé.



Compléter:

1)) D_f = IR\{3}

2) a) f '(4) = -1 b) $f_g'(0) = -2$

c) $f_d'(0) = 3$

d) f est elle dérivable en 0? non Justification: $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

3) a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)+1}{x-1} = 0$

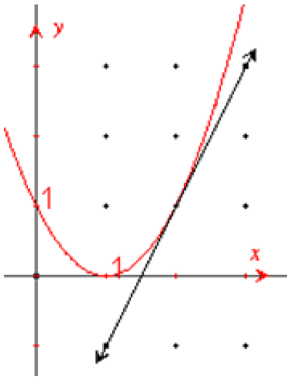
b) f est elle dérivable à gauche en 1? non Justification: discont

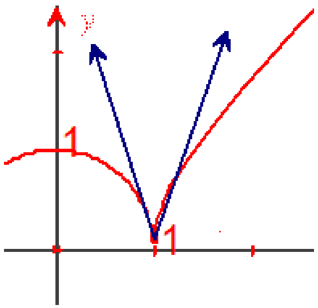
4) a) $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{f(x)+1}{x+1} = 0$ b) $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{f(x)+1}{x+1} = -\infty$

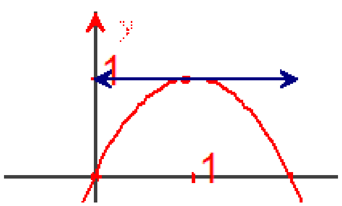
5) La courbe de f admet trois asymptotes; déterminer leurs équations.

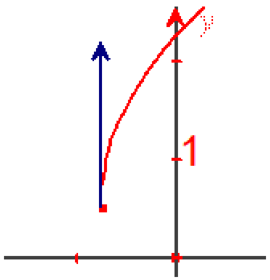
y = -x-1 , x = 3 et y = -2

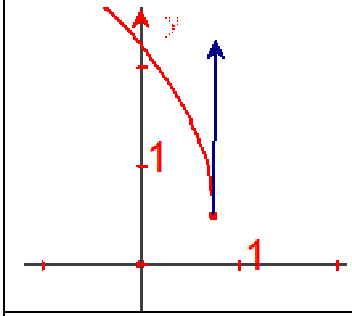
Interprétation géométrique

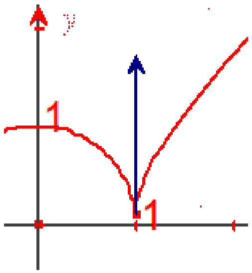




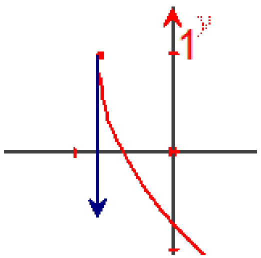
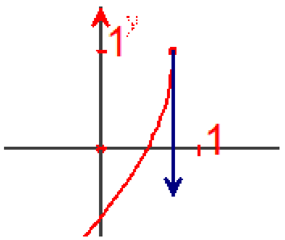
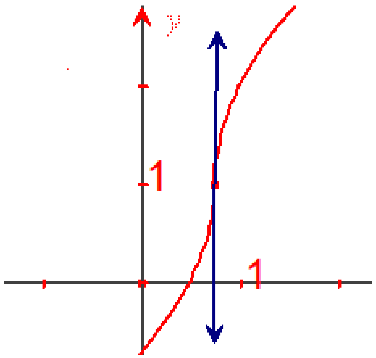
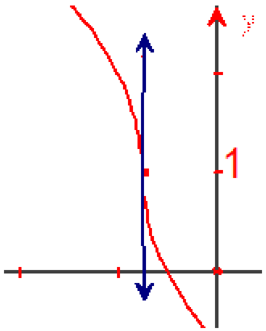
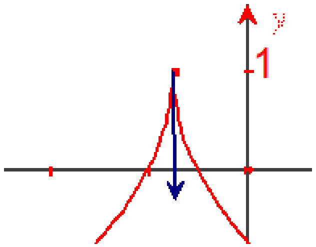
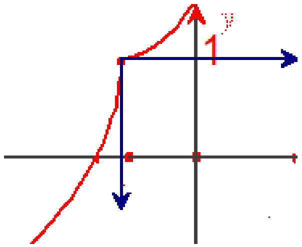








Interprétation géométrique

II. Fonction dérivée

1) Définitions

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I .

  f est dite dérivable sur I ssi ………………………………

- Soit f une fonction définie sur [a,b], a et b réels finis.

  f est dite dérivable sur [a,b] ssi $\begin{cases} \text{..........................} \\ \text{..........................} \\ \text{..........................} \end{cases}$

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. On appelle fonction dérivée de f et on note f ’, la fonction de I dans I qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivée f ’(x).

1) Définitions

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I .

  f est dite dérivable sur I ssi elle est dérivable en tout point de I

- Soit f une fonction définie sur [a,b], a et b réels finis.

  f est dite dérivable sur [a,b] ssi $\begin{cases} \text{f est dérivable sur }]a,b[\\ \text{f est dérivable à droite en a} \\ \text{f est dérivable à gauche en b} \end{cases}$

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. On appelle fonction dérivée de f et on note f ’, la fonction de I dans I qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivée f ’(x).

2) Fonctions dérivées usuelles

Compléter le tableau suivant:

Fonction f	**Intervalle**	**Fonction dérivée f'**
		0
$ax + b$		
$x^n,\ n \in IN^* \backslash \{1\}$		
$x^{-n},\ n \in IN^*$		
$\sqrt{x}$		
$\dfrac{1}{x}$		
$\dfrac{ax+b}{cx+d},\ ad - bc \neq 0$		
$\sin(ax + b)$		
$\cos(ax + b)$		
$\tan(ax + b)$		

2) Fonctions dérivées usuelles

Compléter le tableau suivant:

Fonction f	Intervalle	Fonction dérivée f’
a	IR	0
$ax + b$	IR	a
x^n, $n \in IN^* \setminus \{1\}$	IR	nx^{n-1}
x^{-n} , $n \in IN^*$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$-nx^{-n-1}$
$\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$	$1/2\sqrt{x}$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$\frac{-1}{x^2}$
$\frac{ax+b}{cx+d}$, $ad - bc \neq 0$ $c \neq 0$	$]-\infty, \frac{-d}{c}[$ ou $]\frac{-d}{c},+\infty[$	$\frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$
$\sin(ax + b)$	IR	$a\cos(ax+b)$
$\cos(ax + b)$	IR	$-a\sin(ax+b)$
$\tan(ax + b)$	tt int $\subset$ Df	$a/\cos^2(ax+b) = a(1 + \tan^2(ax+b))$

3) Opérations sur les fonctions dérivées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I ; compléter le tableau suivant :

Fonction	Condition	Fonction dérivée	Exemple : f(x) =
$u + v$			$\sin 2x - x^3$
$\alpha u + \beta v$			$\frac{2}{x} - 4\sqrt{x}$
$u.v$			$x^2.\cos x$
$\frac{1}{u}$			$\frac{1}{\sin(2x+3)}$
$\frac{u}{v}$			$\frac{x^2-3x+1}{2x^2+4x-3}$
$\sqrt{u}$			$\sqrt{x^2+x+1}$
u^n, $n \in IN^* \backslash \{1\}$			$\sin^3 x$

3) Opérations sur les fonctions dérivées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I ; compléter le tableau suivant :

Fonction	Condition	Fonction dérivée	Exemple : f(x) =
$u + v$		$u' + v'$	$\sin 2x - x^3$
$\alpha u + \beta v$		$\alpha u' + \beta v'$	$\frac{2}{x} - 4\sqrt{x}$
$u.v$		$u'v + uv'$	$x^2.\cos x$
$\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$	$\frac{-u'}{u^2}$	$\frac{1}{\sin(2x+3)}$
$\frac{u}{v}$	$v(x) \neq 0$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 4x - 3}$
$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$	$u'/(2\sqrt{u})$	$\sqrt{x^2 + x + 1}$
u^n, $n \in IN^* \setminus \{1\}$		$nu'u^{n-1}$	$\sin^3 x$

4) Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction dérivée f ' de f est appelée la dérivée première de f.

Si la fonction f ' est dérivable sur I alors sa fonction dérivée est appelée fonction dérivée seconde de f et on note

$(f')' = f'' \text{ ou } f^{(2)}$.

Si f'' est dérivable sur I alors sa fonction dérivée est appelée fonction dérivée troisième de f (ou dérivée d'ordre 3) et on note $(f'')' = f^{(3)}$.

Ainsi, si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I on note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

Exercices N°4 – 5 – 6 page 71

Exercice N°4

Déterminer, dans chacun des cas, les dérivées successives de f:

1) $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x + 4$
2) $f(x) = \cos x$
3) $f(x)= \sin(2x)$

Exercice N°5

Déterminer une fonction polynôme de degré 3 telle que:

$f(1) = f'(1) = f''(1) = f^{(3)}(1) = 1$

Exercices N°4 – 5 – 6 page 71

Exercice N°6

1) Calculer les dérivées d'ordre 3 des fonctions f et g définies par: $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ et $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$

2) Soit h la fonction définie sur IR \{-1, 1} par $h(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

a) Montrer qu'ils existent deux réels a et b tels que pour tout réel x de IR \{-1, 1} , $h(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-1}$

b) En déduire la dérivée d'ordre 3 de h.

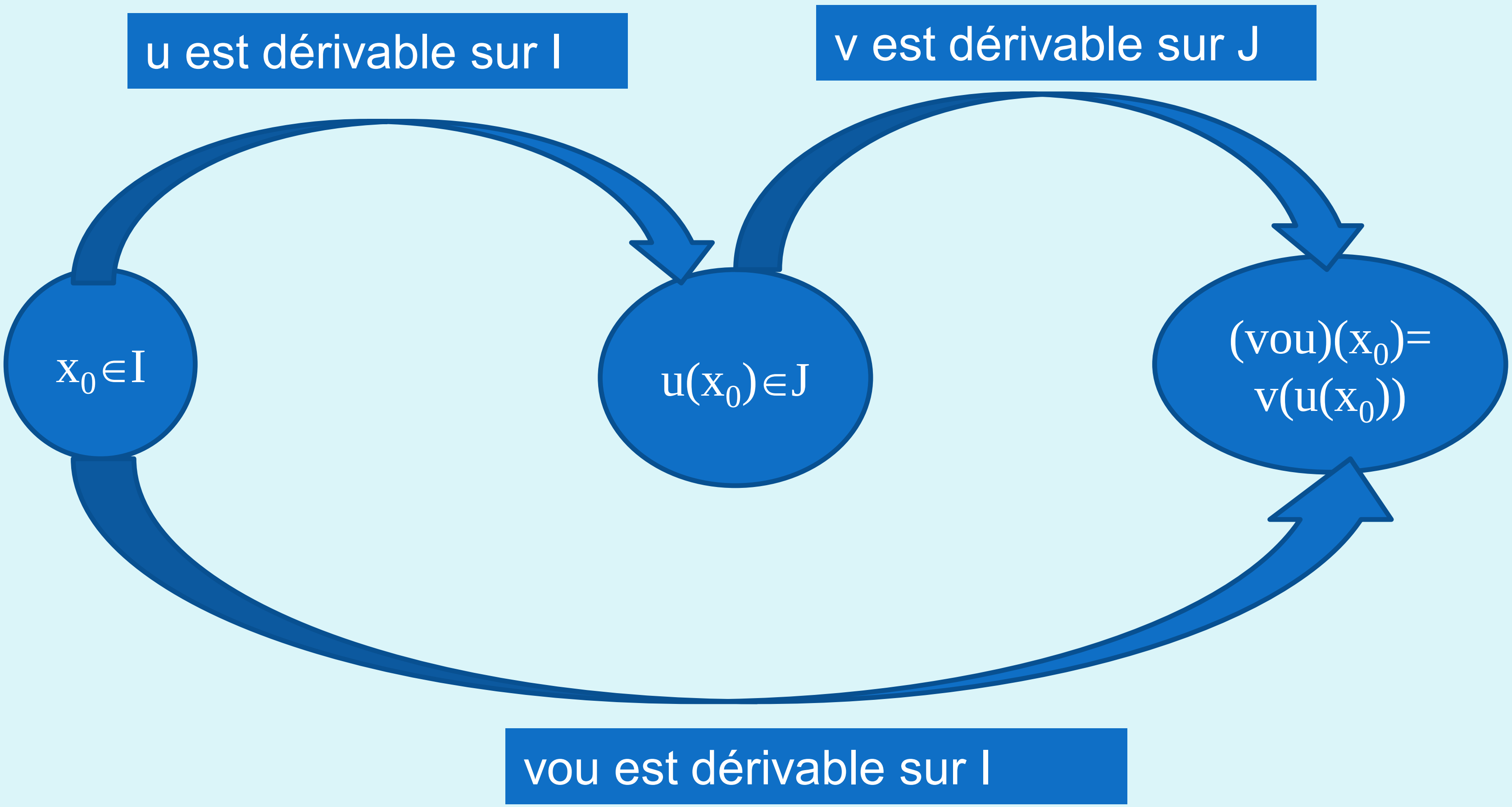
III. Dérivabilité des fonctions composées

Activité

Soit u une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 et v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $u(x_0)$.

On suppose que u est dérivable en x_0 et que v est dérivable en $u(x_0)$.
Montrer que vou est dérivable en x_0 et déterminer $(vou)'(x_0)$.

Organigramme



$$(vou)' = u' \times v'ou$$

Théorème

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel x_0 et v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $u(x_0)$.

Si u est dérivable en x_0 et v est dérivable en $u(x_0)$ alors

la fonction vou est dérivable en x_0

et on a: $(v\circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0))$.

Corollaire

Si u est dérivable sur I et v est dérivable sur un intervalle J contenant u(I) alors la fonction vou est dérivable sur I et on a:

$$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$$

Application

Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \dfrac{\tan x}{\sqrt{\tan^2 x - 1}}$

1) On pose $v(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $x \in]1, +\infty[$

Montrer que v est dérivable sur $]1, +\infty[$

et calculer $v'(x)$

2) Montrer que f est dérivable sur $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$

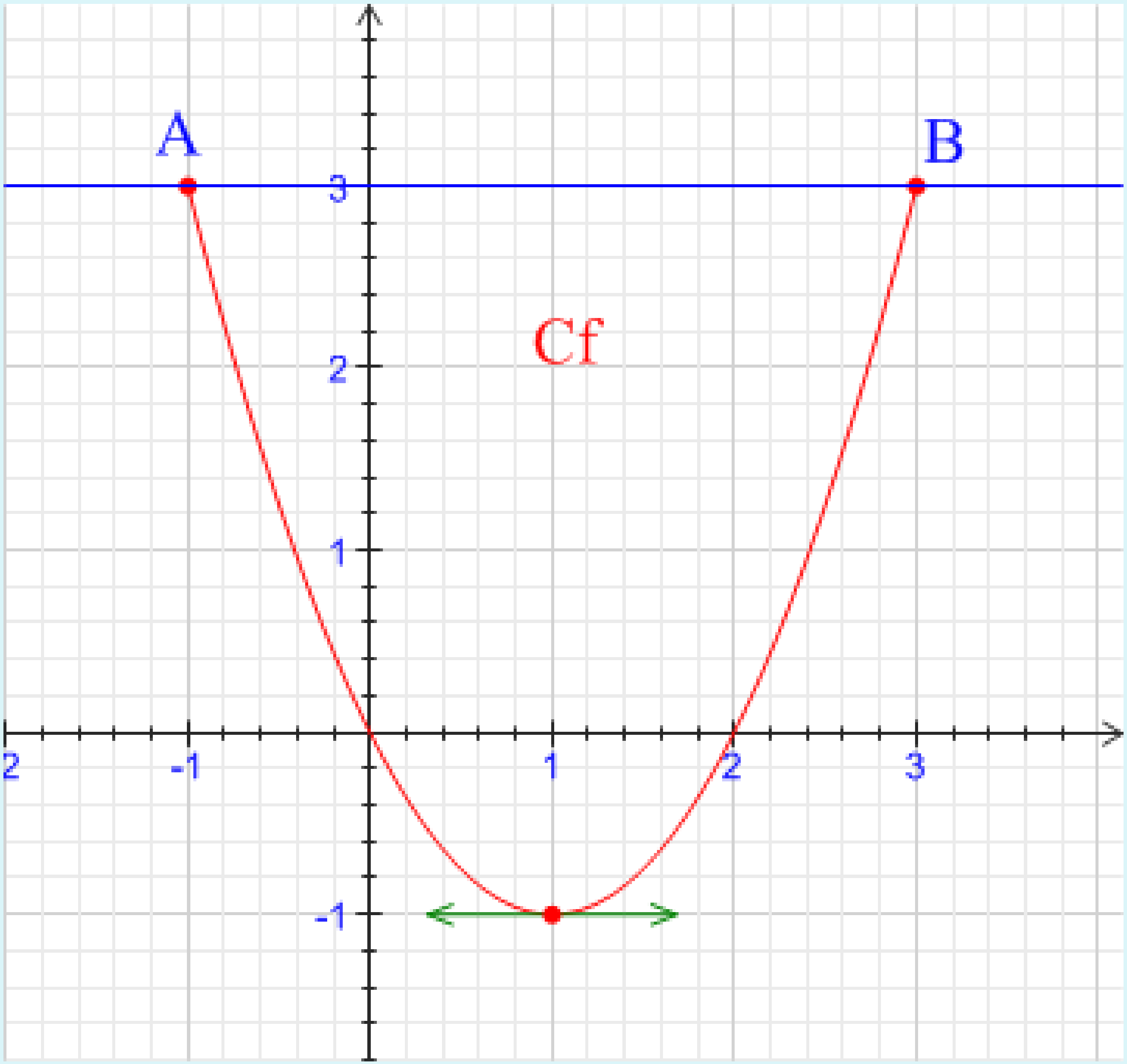
et calculer $f'(x)$.

IV. Théorème des accroissements finis

Activité

Soit f la fonction définie sur [-1,3] par $f(x) = x^2 - 2x$. A et B sont les points de la courbe $\mathscr{C}$ de f d'abscisses respectives -1 et 3.

Montrer qu'il existe un réel $c \in]-1,3[$ tel que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse c soit parallèle à la droite (AB).


A
B
Cf
3
2
1
-1
2
-1
1
2
3

Théorème de Rolle

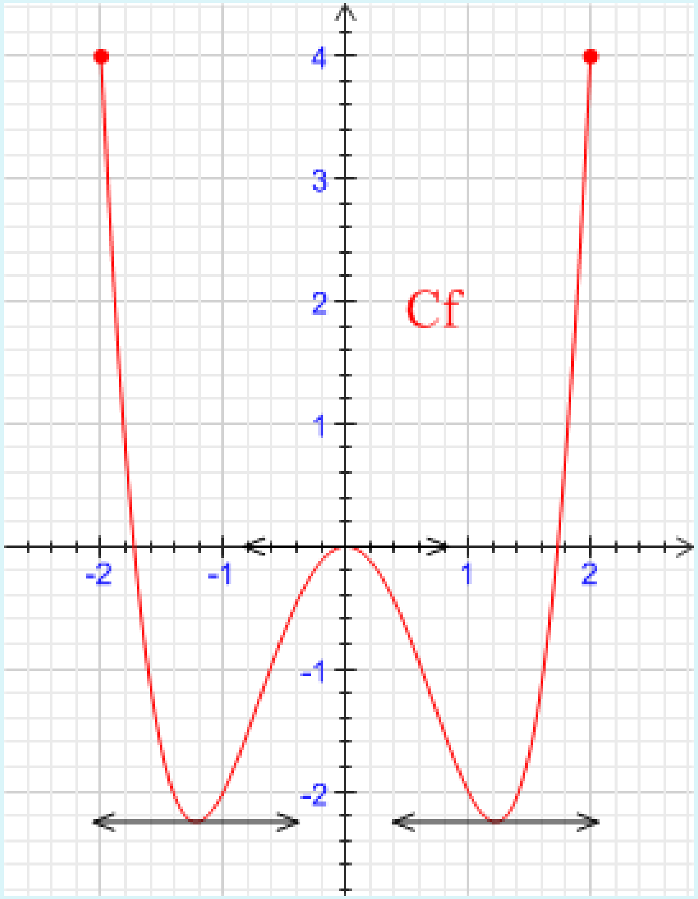
Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ $(a \prec b)$

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{cases}$$

alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

Interprétation géométrique

Avec les conditions du théorème de Rolle, la courbe C de f admet au moins une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



Application

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$

Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet, dans IR, exactement trois solutions.

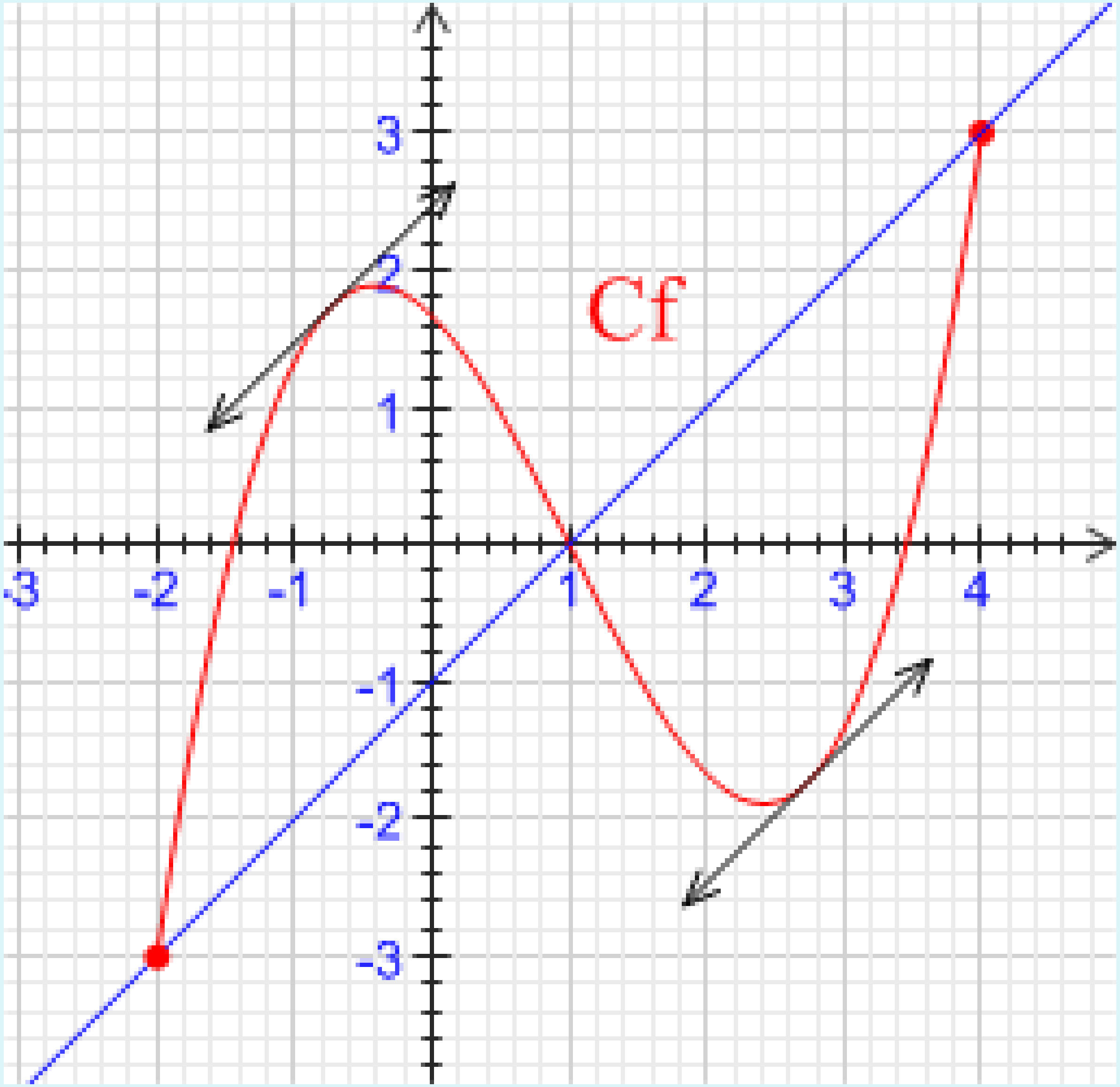
Activité

Soit f la fonction définie sur [-2,4] par

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + \frac{5}{3}$.

A et B sont les points de la courbe $\mathscr{C}$ de f d'abscisses respectives -2 et 4.

Montrer qu'il existe un réel $c \in]-2,4[$ tel que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse c soit parallèle à la droite (AB).


Cf
3
1
-1
-2
-3
-3
-2
-1
1
2
3
4

Théorème

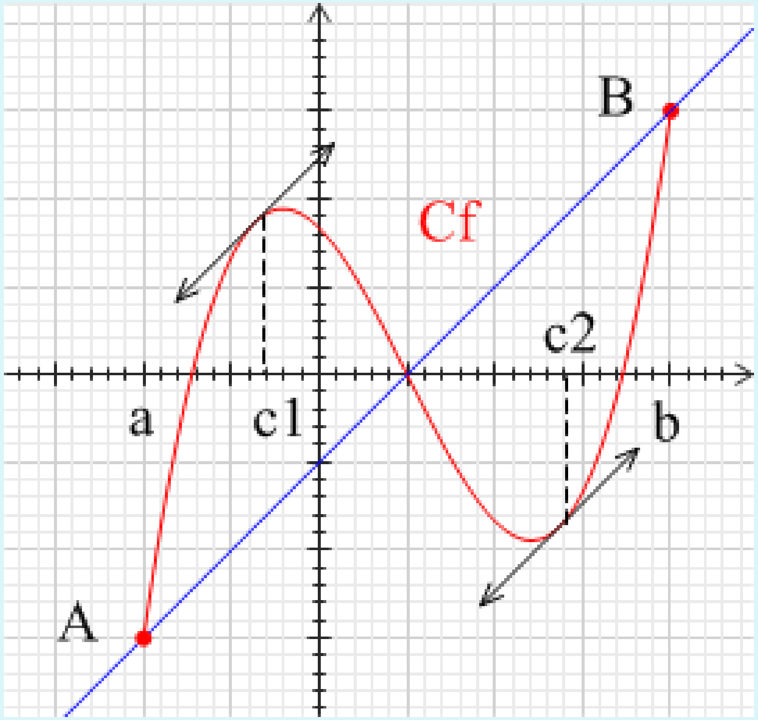
Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ $(a \prec b)$

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\end{cases}$

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Interprétation géométrique

Avec les conditions du théorème , la courbe C de f admet au moins une tangente parallèle à la droite (AB), où A et B sont les points d'abscisses respectives a et b.



Application

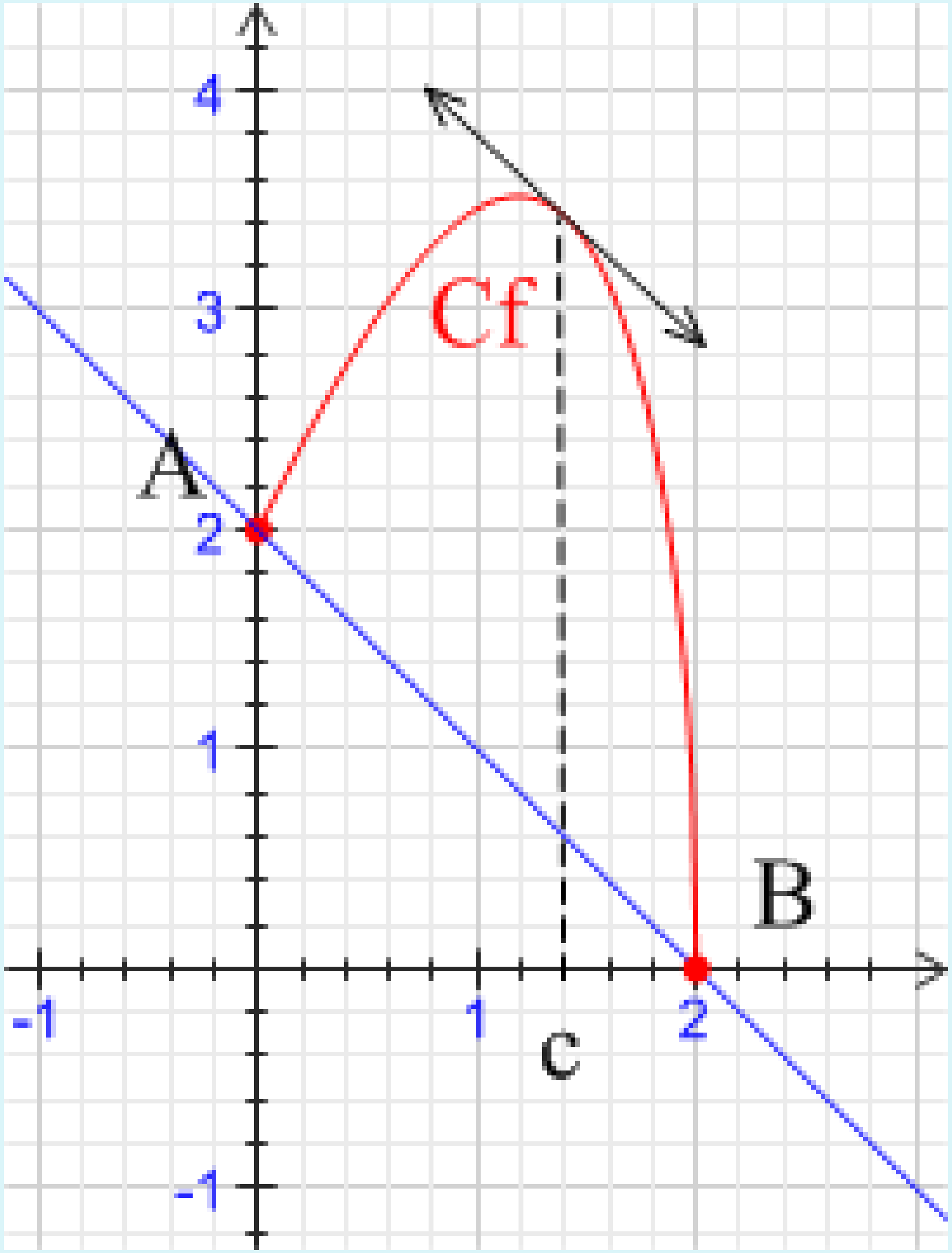
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (x+1)\sqrt{4-x^2}$$

Montrer que l'équation $f'(x) = -1$ admet,

dans $]0, 2[$, au moins une solution.

Interpréter géométriquement.


4
3
2
1
-1
-1
1
2
A
B
Cf
c

V. Inégalité des accroissements finis

Théorème

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$;

m et M deux réels.

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ \text{pour tout } x \in]a, b[, m \le f'(x) \le M \end{cases}$$

alors $m(b - a) \le f(b) - f(a) \le M(b - a)$

Application (exercice N°13 page 72)

Soit f la fonction définie sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tan x} & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

2. Montrer que pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,

$-2 \leq f'(x) \leq -1$.

3. En déduire que pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$,

$$\frac{\pi}{2} - 2x \leq \frac{1 - \tan x}{\tan x} \leq \frac{\pi}{4} - x.$$

Application (exercice N°37 page 75)

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur à 1 par $u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

a. Montrer que pour tout k de $[1, +\infty[$,

$$\frac{2}{(k+1)^3} \leq f(k) - f(k+1) \leq \frac{2}{k^3}.$$

b. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur à 1,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq u_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}.$$

c. En déduire que (u_n) est majorée.

d. En déduire que (u_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Corollaire

Soit f une fonction définie sur un intervalle I;

k un réel strictement positif.

$$\text{Si } \begin{cases} \text{f est dérivable sur I} \\ \text{pour tout } x \in I, |f'(x)| \le k \end{cases}$$

alors pour tous réels a et b de I

$$|f(b) - f(a)| \le k|b - a|$$

Exercice

Soit f la fonction définie sur R par: f(x)= $-x+\sqrt{x^2+8}$

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Déterminer les branches infinies de la courbe C de f.

3) Tracer la courbe C dans un repère orthonormé .

On prendra 2cm pour unité graphique.

4) a. Démontrer que : $\forall x \in [1,2]$ on a : $1 \leq f(x) \leq 2$

b. Etudier le sens de variation de f ' sur [1,2].

En déduire que $|f'(x)| \leq \dfrac{2}{3}$, $\forall x \in [1,2]$.

c. En déduire que pour tous x et y de [1,2] on a :

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{2}{3}|y - x|$$

VI. Point d’inflexion

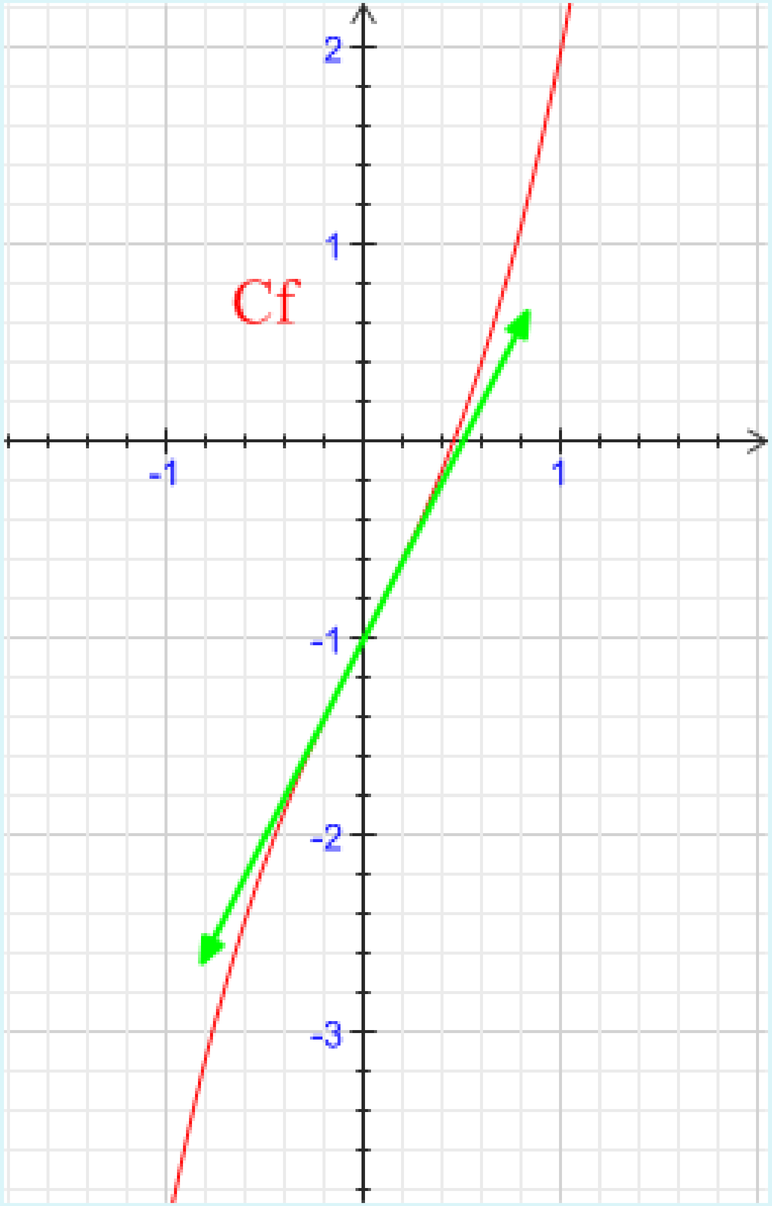
Activité

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 2x - 1$

1) **Dresser le tableau de variation de f.**
2) **Déterminer les branches infinies de la courbe C de f.**
3) **a) Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe C en son point d'abscisse 0.**

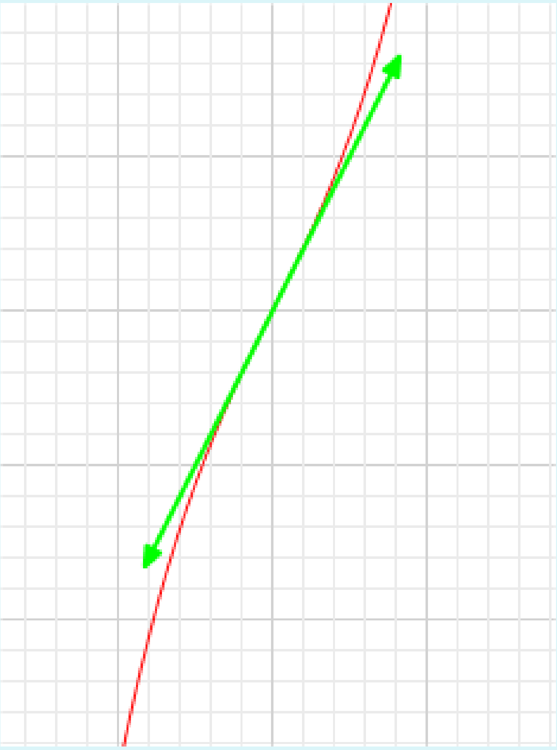
   b) Etudier la position relative de C par rapport à Δ.

4) **Tracer Δ et C.**


2
1
Cf
-1
1
-1
-2
-3

Définition

Soit f un fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
On dit que le point A(a, f(a)) est un point d'inflexion de la courbe C_f lorsque C_f traverse sa tangente au point A.



Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

Si la dérivée seconde f'' s'annule en a en changeant de signe alors le point A(a, f(a)) est un point d'inflexion de la courbe C_f .

Démonstration

Rappelons d'abord que C_f et la tangente Δ à C_f au point A ont pour équations respectives: $y = f(x)$ et $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Posons $\varphi(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$

$\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$ donc $\varphi'(a) = 0$

$\varphi''(x) = f''(x)$ donc $\varphi''(a) = 0$

Deux cas se présente pour le tableau de variation de φ

Dresser ces tableaux puis conclure.