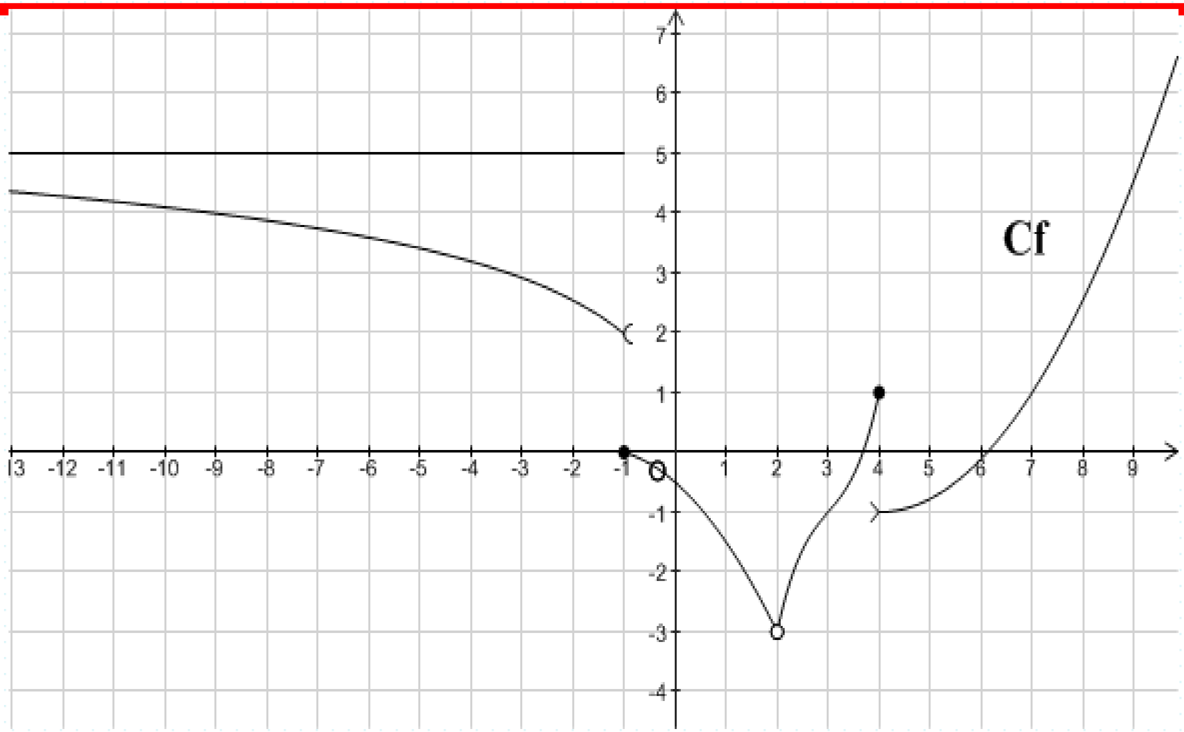
Limites et continuité

Cours élaboré par le prof: Chouihi

I. Rappels

Exercice N°1



Dans la figure ci-dessus on a représenté une fonction f dans un repère orthonormé.

1) a) Préciser le domaine de définition D de f.

b) Peut on parler de continuité de f en 2? Pourquoi?

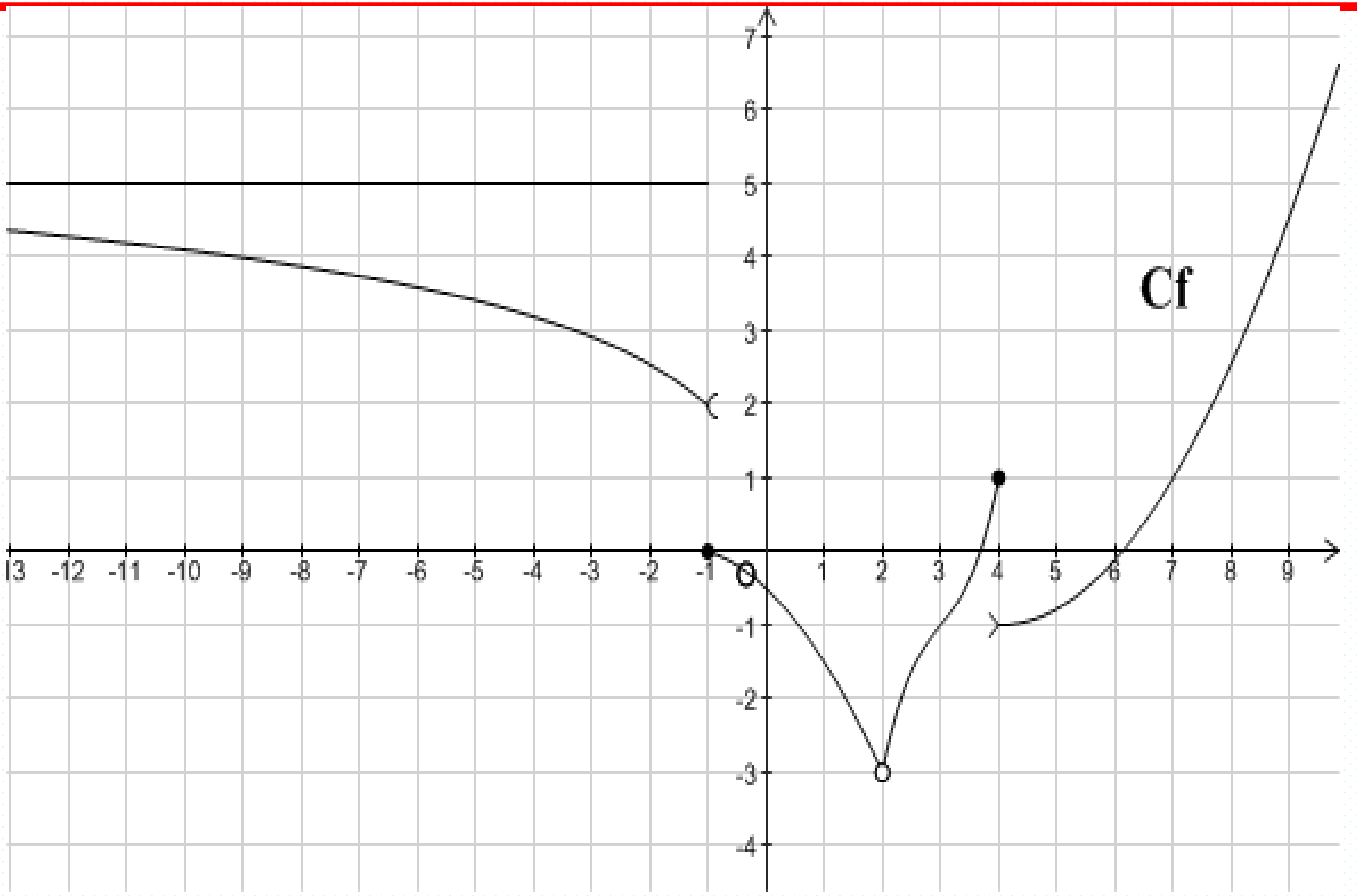
2) a) La fonction f est elle continue en (-1)? à droite en (-1) ? et à gauche en (-1)?

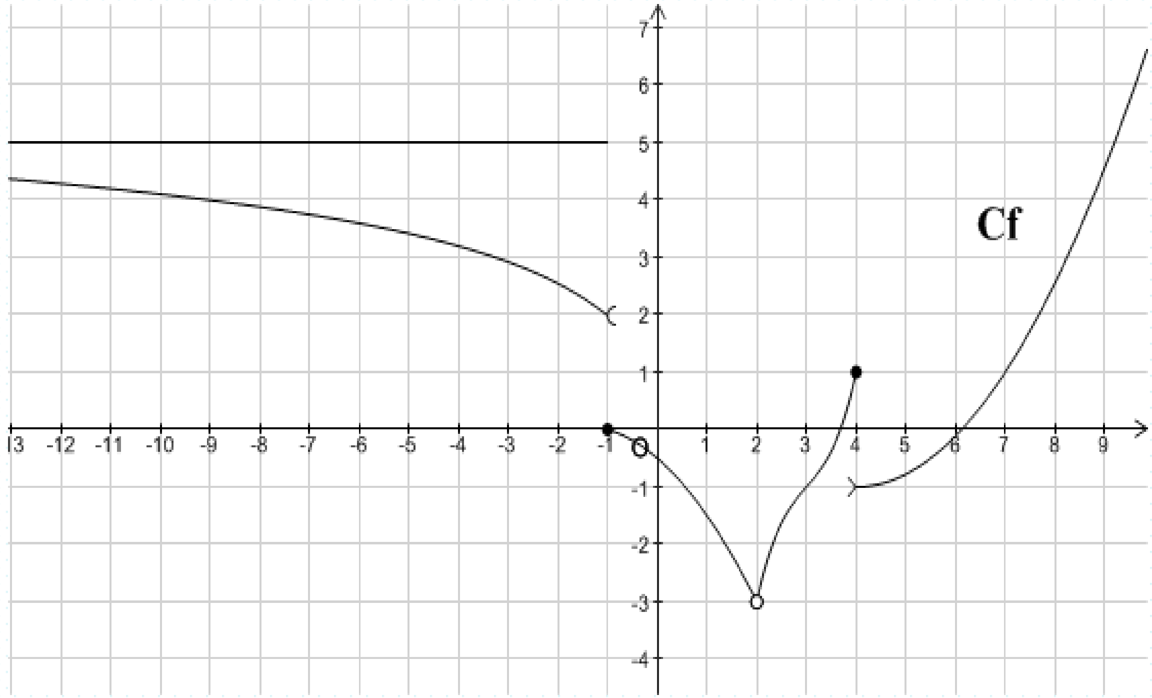
b) La fonction f est elle continue en 4? à droite en 4 ? et à gauche en 4?

3) a) Déterminer $\lim_{x \to 2} f(x)$.

b) f est elle prolongeable par continuité en 2? Si oui préciser son prolongement.

Exercice N°1





4) Déterminer $\lim_{x \to (-1)^-} f(x)$; $\lim_{x \to (-1)^+} f(x)$; $\lim_{x \to 4^-} f(x)$; $\lim_{x \to 4^+} f(x)$.

5) a) Déterminer les images par f de chacun des intervalles: $]-\infty, -1[$; $[-1,4]$ et $[4,+\infty[$.

b) Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $]-3\,,1]$.

6) On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $[-1,4]$.
Reproduire sur votre copie la courbe de g puis construire, sur la même figure, la courbe de la fonction h définie par $h(x) = -g(x) + 1$

Exercice N°2

Soit f la fonction définie par:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{si } x>2\\[2mm] \dfrac{2x^3-11x^2+23x-18}{8x^2-20x+8} & \text{si } x<2\\[2mm] \dfrac{1}{4} & \text{si } x=2\end{cases}$$

1) **Montrer que f est continue en 2.**
2) **Etudier la continuité de f sur IR**

Exercice N°3

Déterminer le domaine de définition D_f de f et calculer les limites aux bornes de D_f dans chacun des cas suivants :

$$a)\ f(x)=\frac{\sqrt{x^2-9}-7x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad b)\ f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$$

$$c)\ f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}-1}$$

$$d)\ f(x)=\sqrt{x^2+5x+6}-(x+3)$$

$$e)\ f(x)=\sqrt{x^3+x^2-x-1}-x\sqrt{x+1}$$

Exercice N°4

Calculer les limites en 0 des fonctions suivantes:

1/ $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$

2/ $f(x) = \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

3/ $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$ 4/ $f(x) = \dfrac{x-\sin 2x}{x-\sin 3x}$

Exercice N°5

Calculer la limite de f en a

1/ $f(x) = \dfrac{1-\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x}$, $a = \dfrac{\pi}{2}$

2/ $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$, $a = \dfrac{\pi}{3}$

3/ $f(x) = \dfrac{\tan x}{1-\sin 2x}$, $a = \dfrac{\pi}{4}$

4/ $f(x) = \dfrac{2\cos x-1}{\cos^2 x-\sin^2 x+5\cos x-2}$, $a = \dfrac{\pi}{3}$

Exercice N°6

Calculer les limites suivantes:

1/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin[\pi(x-E(x)]}{x}$

2/ $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{1}{x^2-9x+20} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$

3/ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-n}{x-1}$ ($n\in \mathbb{N}$, $n>1$)

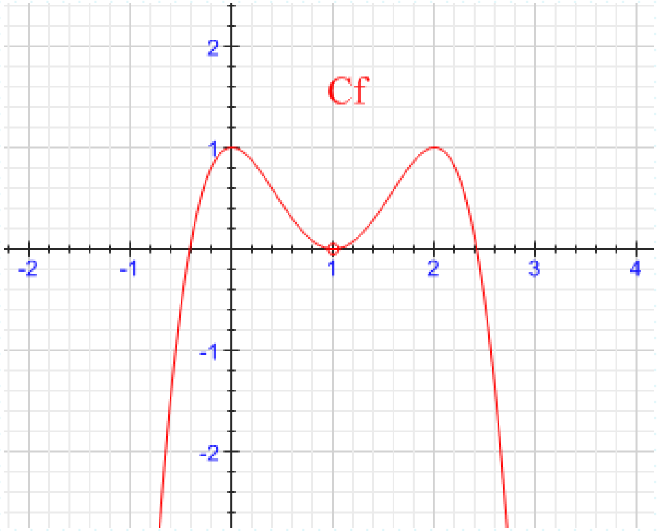
II. Critères de comparaisons (limites et ordre)

NB:

Dans tout ce qui suit, f , g et h sont des fonctions Définies sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$ (éventuellement $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$ et dans ce cas I sera $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$ où $a \in IR$)

Théorème N°1

$$\text{Si } \begin{cases} \text{pour tout } x \in I,\ f(x) \geq 0 \\ \lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = \ell\ ,\ \ell \in IR \end{cases} \quad \text{alors } \ell \geq 0$$



Application:

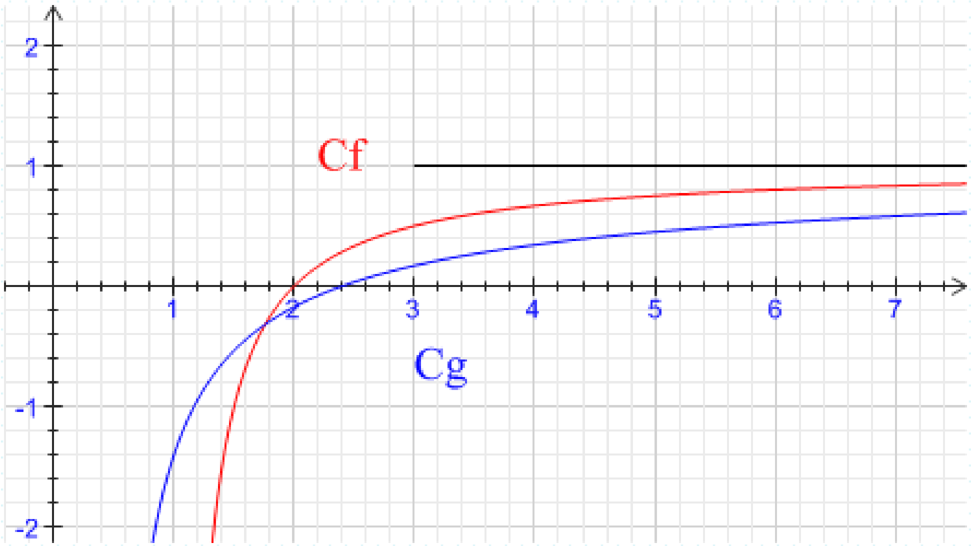
Interpréter la courbe ci-contre conformément au théorème

Corollaire N°1

$$\text{Si} \begin{cases} \text{pour tout } x \in I,\ f(x) \geq g(x) \\ \lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = \ell \text{ et } \lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = \ell' \end{cases} \text{ alors } \ell \geq \ell'$$

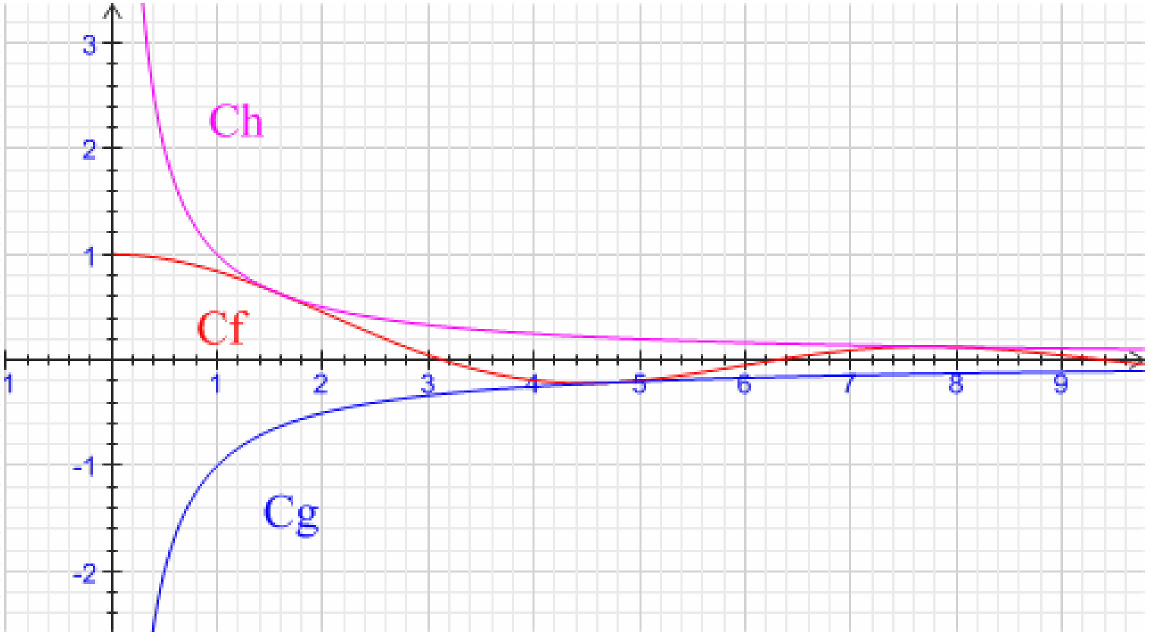
Application:

Interpréter la courbe ci-contre conformément au théorème



Théorème N°2

$$\text{Si } \begin{cases} \text{pour tout } x \in I, \; g(x) \le f(x) \le h(x) \\ \lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto x_0} h(x) = \ell \end{cases} \quad \text{alors } \lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = \ell$$



Application N°1

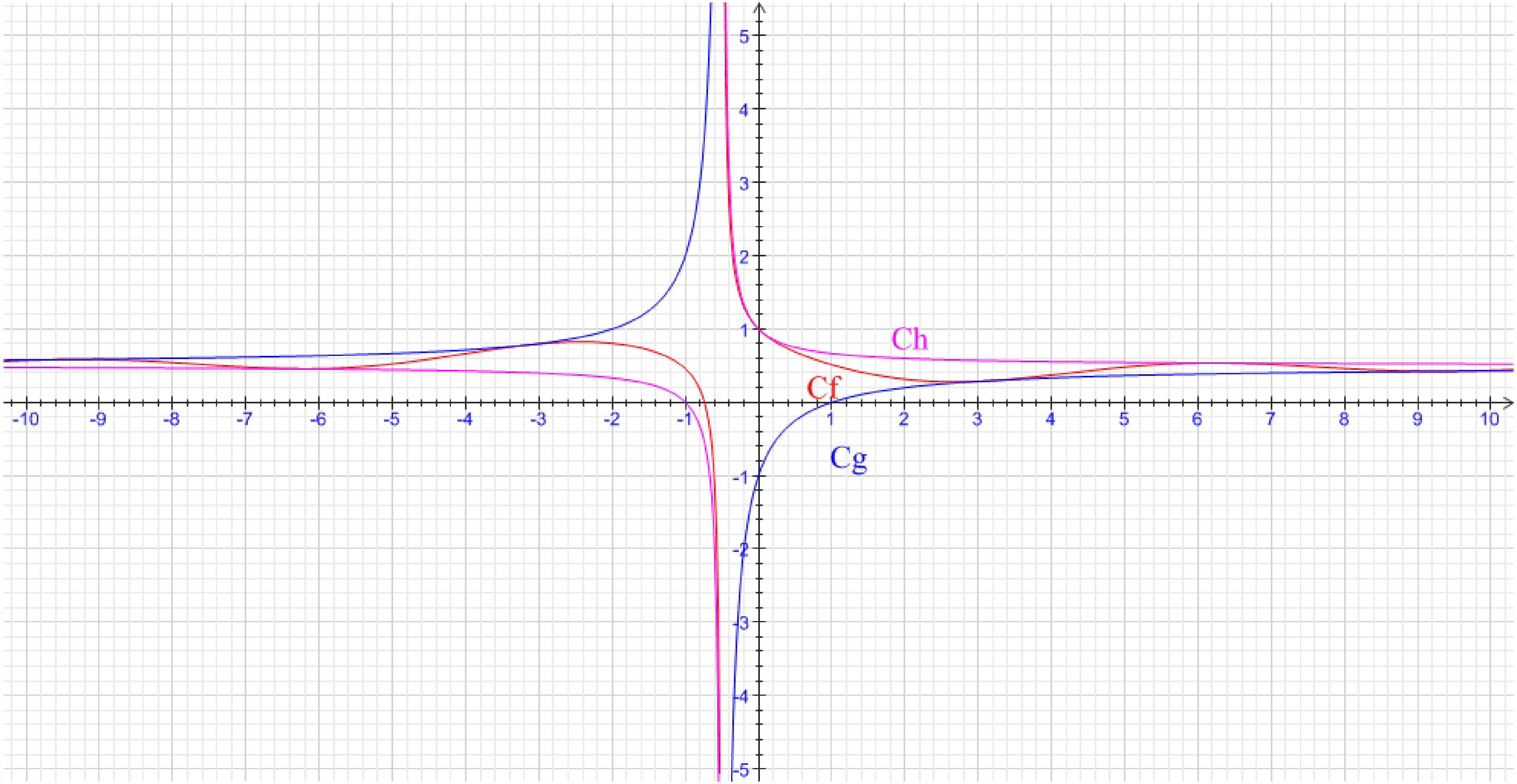
On pose $f(x) = \dfrac{x+\cos x}{2x+1}$

1) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a:

$$\frac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2x+1}$$

b) En déduire $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x)$

2) Calculer $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x)$



Cours élaboré par le prof: Chouihi

Exercice

1/ Calculer $\lim\limits_{x \to 0} x.E\left(x - \frac{1}{x}\right)$

2/ On pose $f(x) = \left(1 - E\left(\frac{1}{x}\right)\right) \sin x$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0

Exercice (solution)

$$\lim_{x\to 0} x.E\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

Exercice (solution)

$$\lim_{x \to 0} x . E\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Exercice (solution)

$$\lim_{x\to 0} x.\,E\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

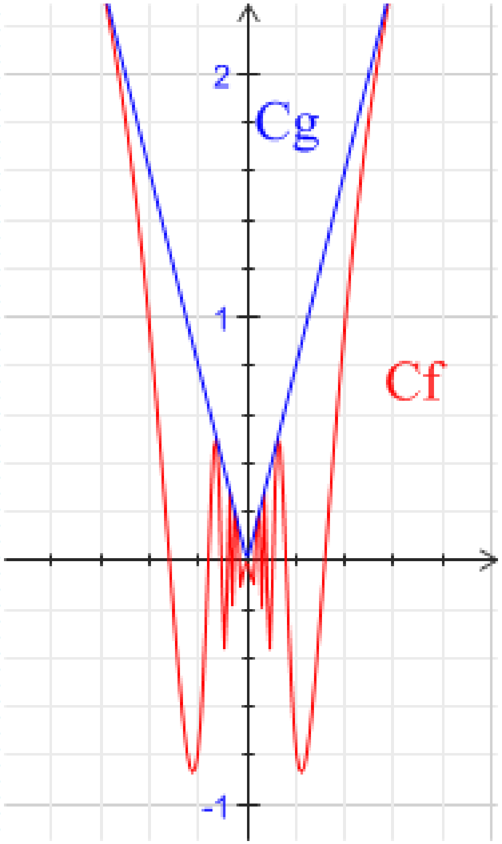
Exercice (solution)

$$\mathbf{f(x) = \left(1 - E\left(\frac{1}{x}\right)\right) sinx}$$

Corollaire N°2

$$\text{Si } \begin{cases} \text{pour tout } x \in I, \ |f(x)| \leq g(x) \\ \lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = 0 \end{cases}$$

$$\text{alors } \lim_{x \mapsto x_0} f(x) = 0$$



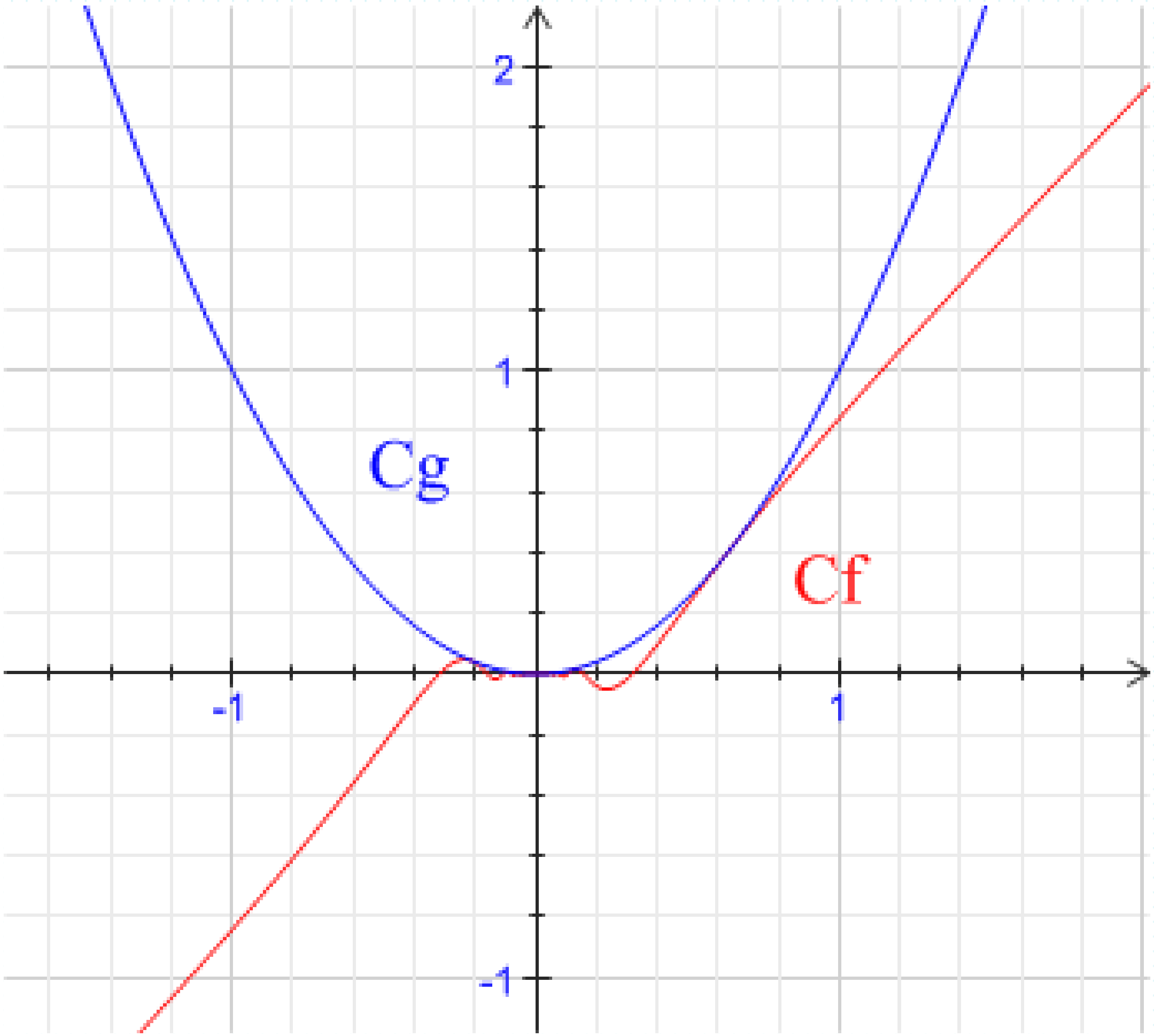
Application N°2

On pose $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$

a) Montrer que pour tout $x \neq 0$, on a:

$$|f(x)| \leq x^2$$

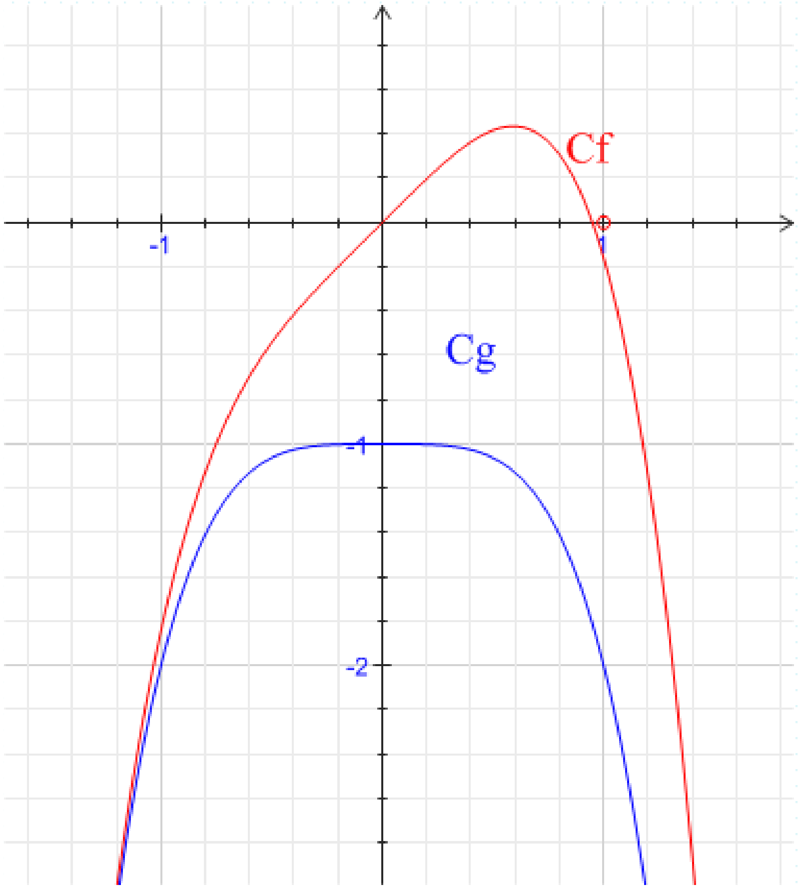
b) En déduire $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x)$


2
1
-1
-1
1
Cg
Cf

Théorème N°3

$$\text{Si } \begin{cases} \text{pour tout } x \in I,\ f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = -\infty \end{cases}$$

$$\text{alors } \lim_{x \mapsto x_0} f(x) = -\infty$$



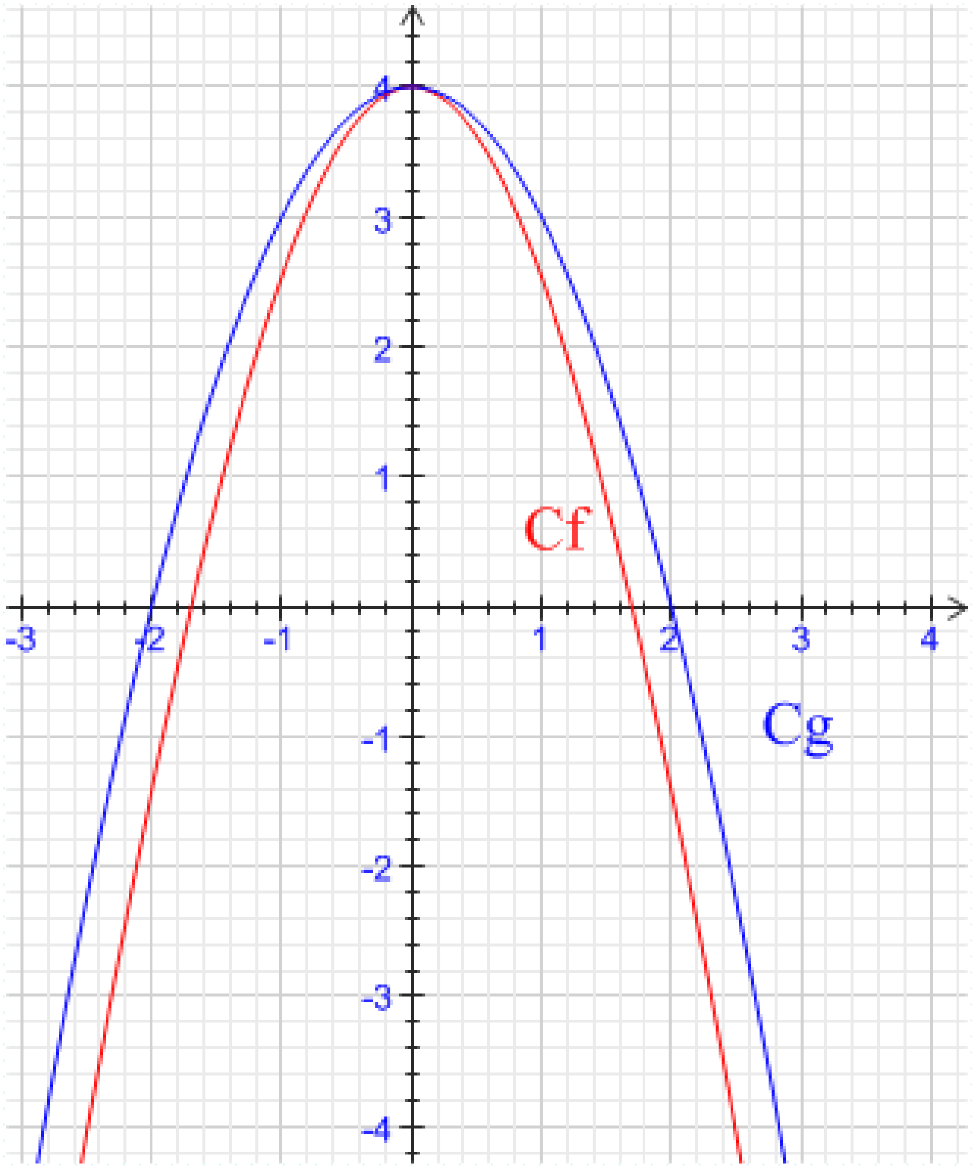
Application N°3

On pose $f(x) = -x^2 + 3 + \cos x$

a) Montrer que pour tout $x \in IR$, on a:

$$-x^2 + 2 \leq f(x) \leq -x^2 + 4$$

b) En déduire $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

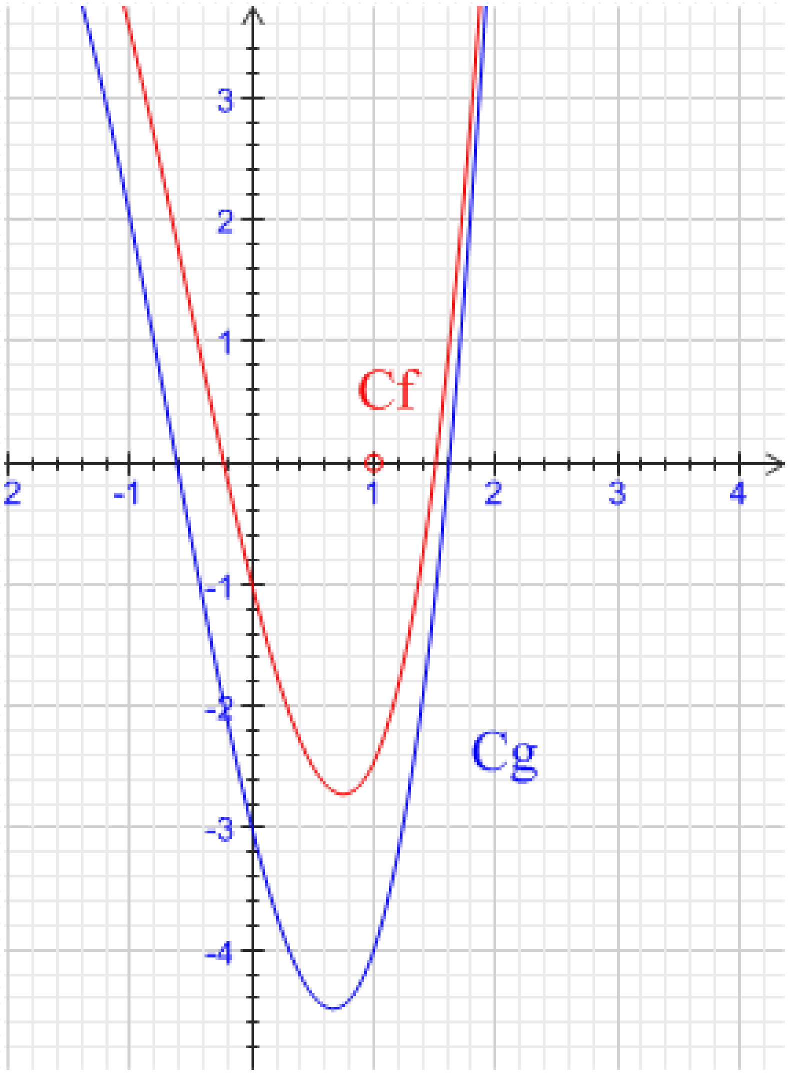


Cf
Cg
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

Théorème N°4

Si $\begin{cases} \text{pour tout } x \in I,\ f(x) \geq g(x) \\ \lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = +\infty \end{cases}$

alors $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = +\infty$



Application N°4

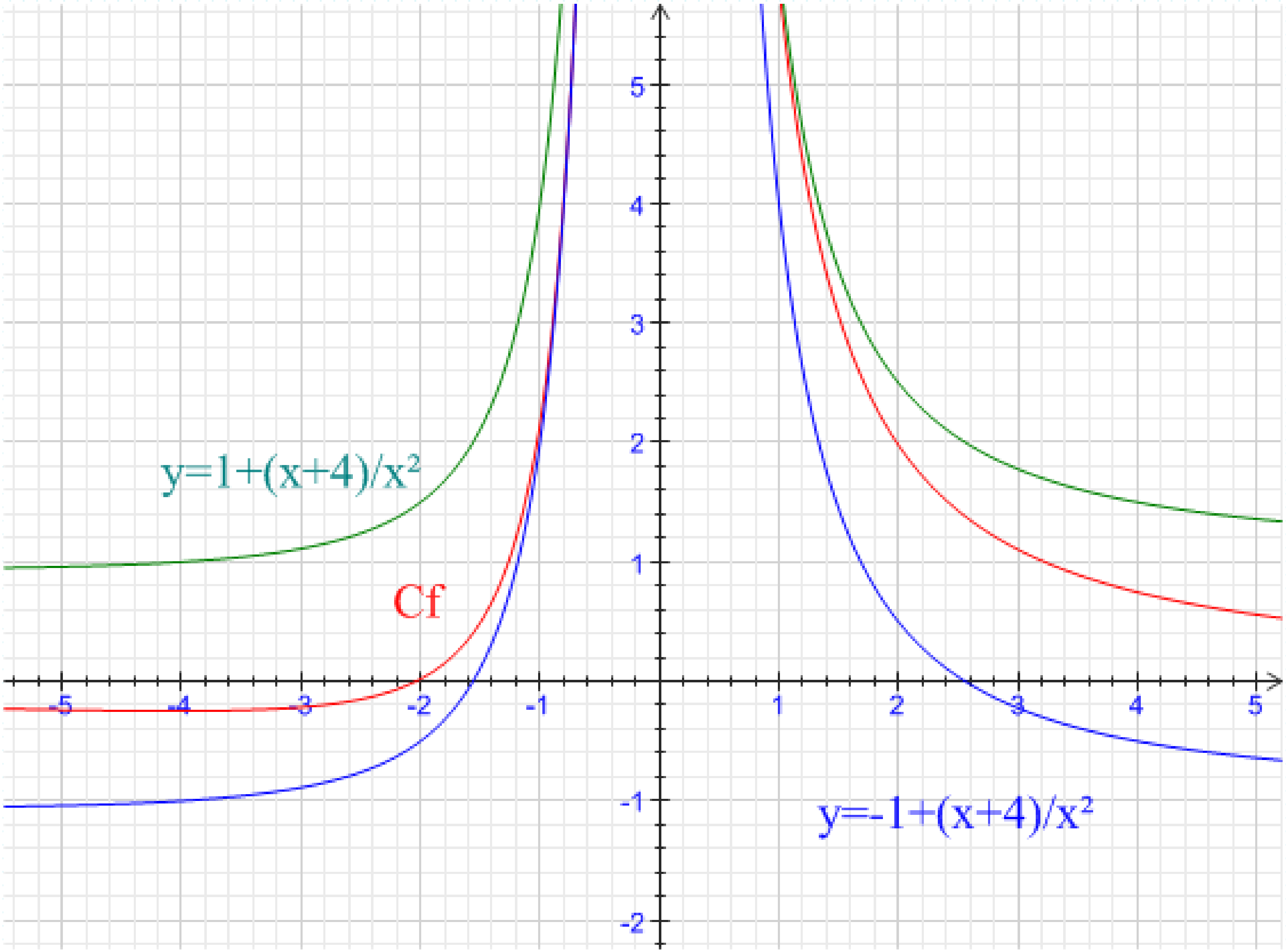
On pose $f(x) = \frac{x+4}{x^2} + \sin(\frac{1}{x})$

a) Montrer que pour tout $x \in IR^*$, on a:

$$\frac{x+4}{x^2} - 1 \leq f(x) \leq \frac{x+4}{x^2} + 1$$

b) En déduire $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x)$

$$f(x) = \frac{x+4}{x^2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



III. Fonction composée

1. Activité N°1

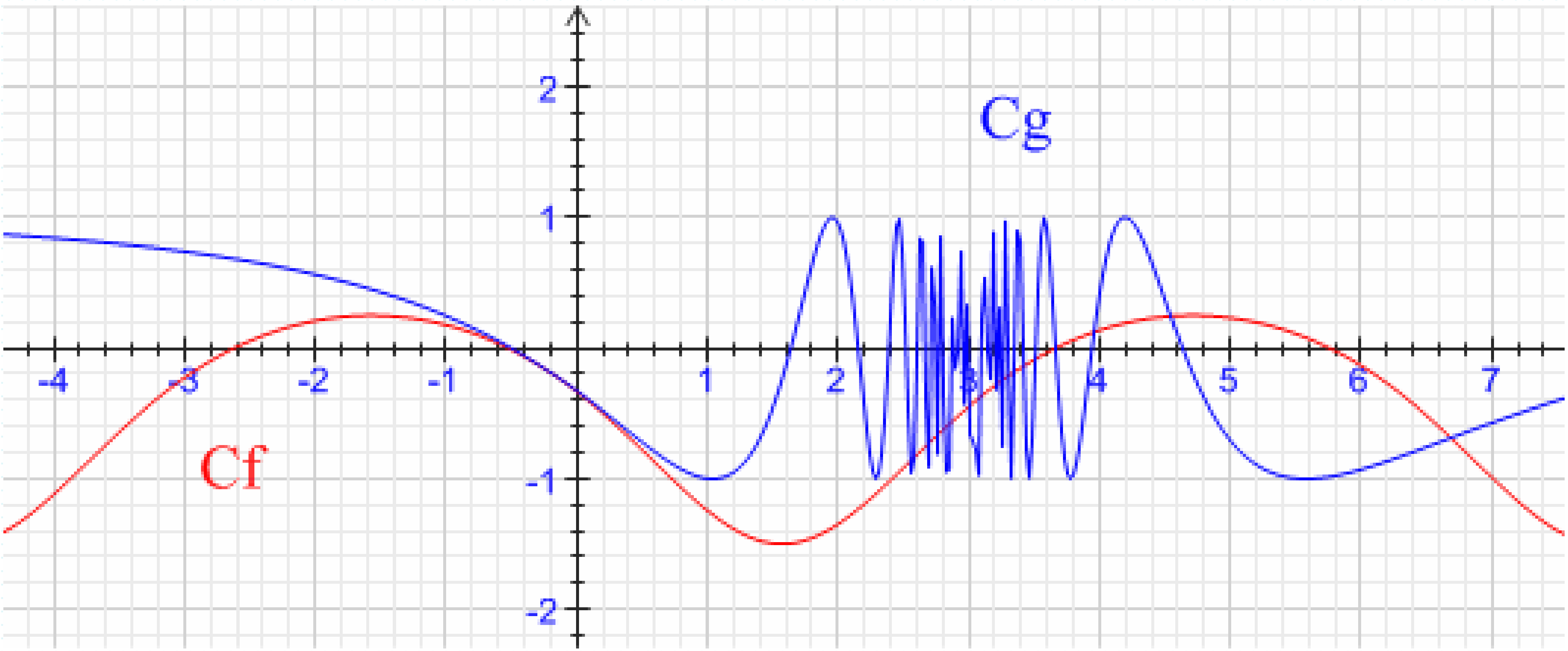
On pose $u(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ et $v(x) = \sin x$

On pose $f(x) = v(u(x))$ et $g(x) = u(v(x))$

1) Exprimer, en fonction de x, f(x).

2) Exprimer, en fonction de x, g(x)

3) A-t-on: $v(u(x)) = u(v(x))$, pour tout $x \in IR$?


Cg
Cf
2
1
-1
-2
-4
-3
-2
-1
1
2
4
5
6
7

2. Définition

'

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que u(I) $\subset$ J.
On appelle fonction composée de u par v, la fonction notée vou et définie sur I par :

$$v \circ u(x) = v(u(x))$$

Application N°5

1) Soit u et v les fonctions définies par $u(x) = 1 - \sin^2 x$ et $v(x) = \sqrt{x}$

On pose f = vou et g = uov

a) Exprimer f(x) en fonction de x puis déterminer Df

b) Exprimer g(x) en fonction de x puis déterminer Dg

c) A-t-on f = g?

2) On pose $f(x) = \frac{2\cos^2 x+3}{5\cos^2 x-7}$

Décomposer f sous la forme vou où u et v sont des fonctions que l'on précisera

3. Théorème

- **Si u est une fonction continue en un réel a et v est une fonction continue en u(a) alors la fonction vou est continue en a.**

- **Si u est continue sur un intervalle I et v est continue sur u(I) alors la fonction vou est continue sur I.**

Application N°6

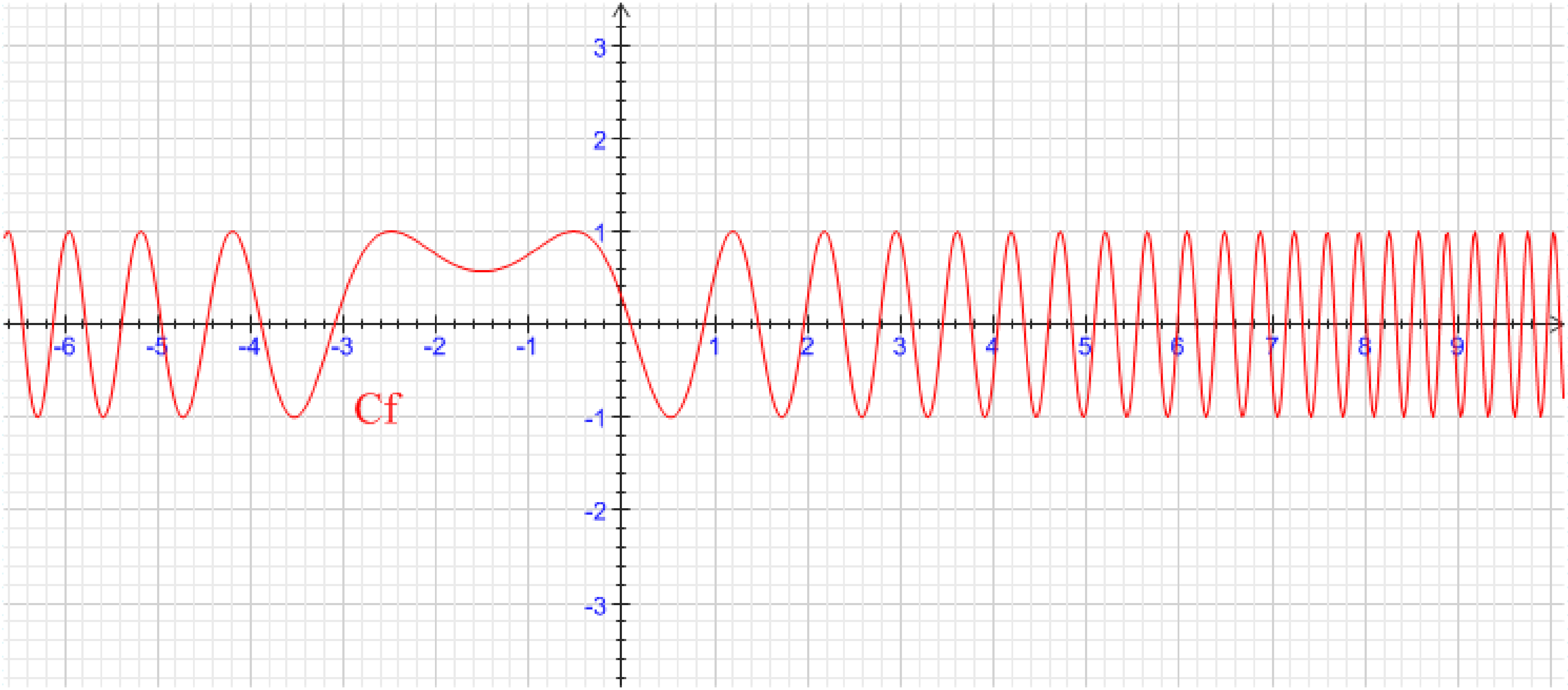
En écrivant f sous la forme de composée , déterminer les intervalles sur les quels elle est continue.

1) $f(x) = \cos(x^2+3x-5)$

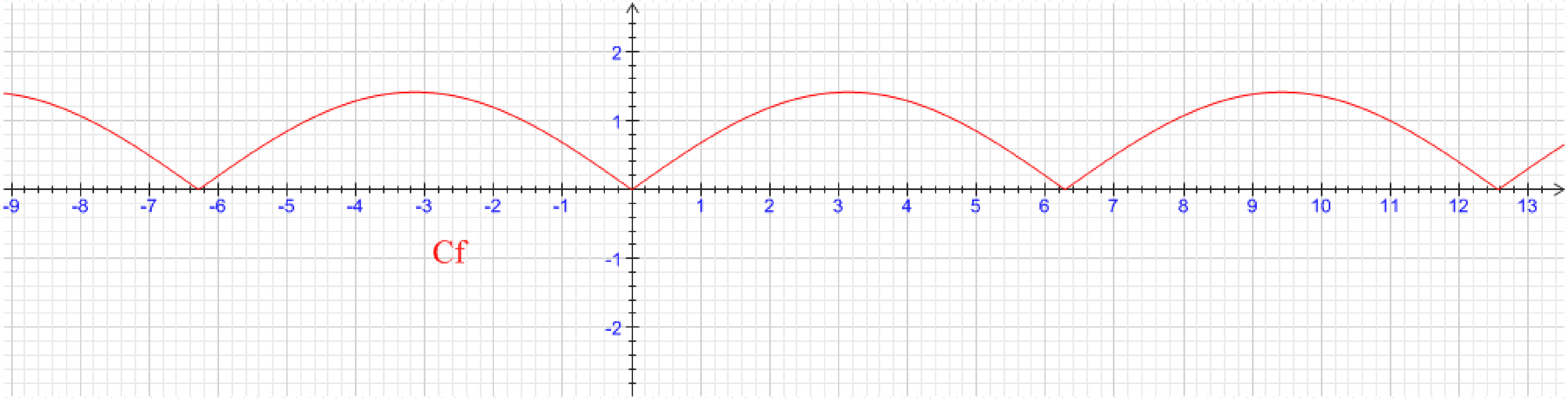
2) $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$

3) $f(x) = \dfrac{3\sin x + 7}{\sin x + 2}$

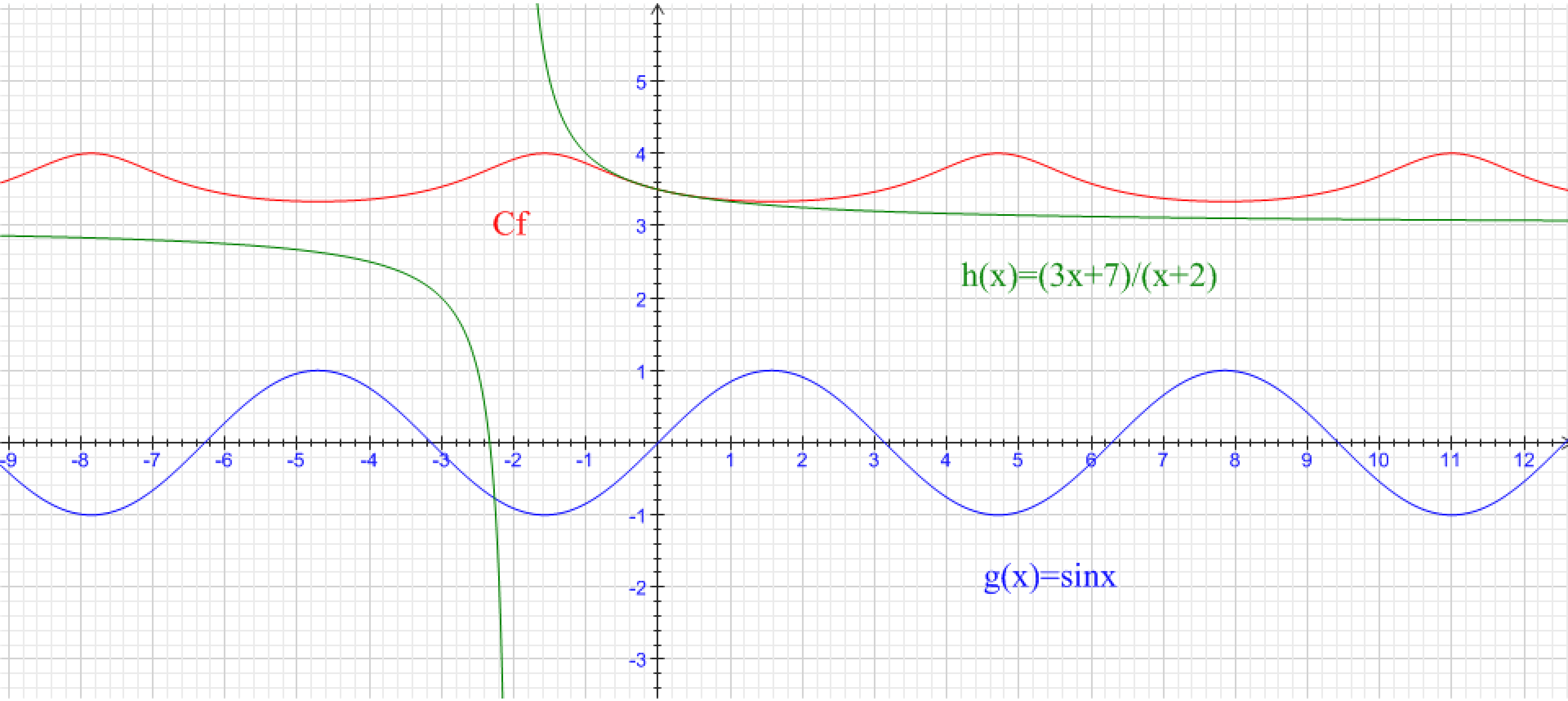
$$f(x) = \cos(x^2+3x - 5)$$



$$f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$$



$$f(x) = \frac{3\sin x + 7}{\sin x + 2}$$



4) Théorème

Soit u et v deux fonctions, a, b et c trois réels (finis ou infinis)

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x \mapsto a} u(x) = b \\ \lim\limits_{x \mapsto b} v(x) = c \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim\limits_{x \mapsto a} vou(x) = c$$

Application N°7

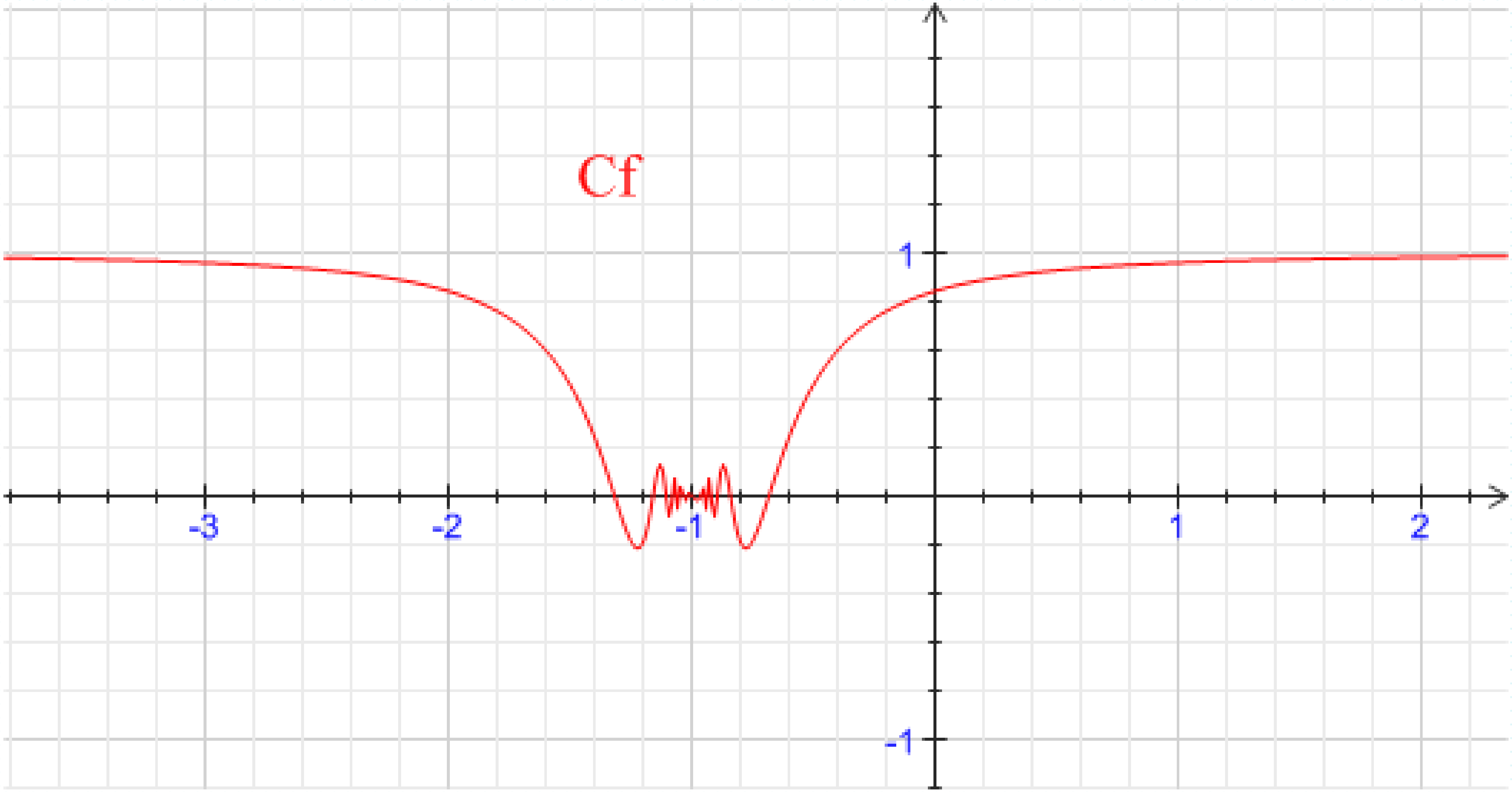
1) On pose $f(x) = (x+1)\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

Calculer $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x)$

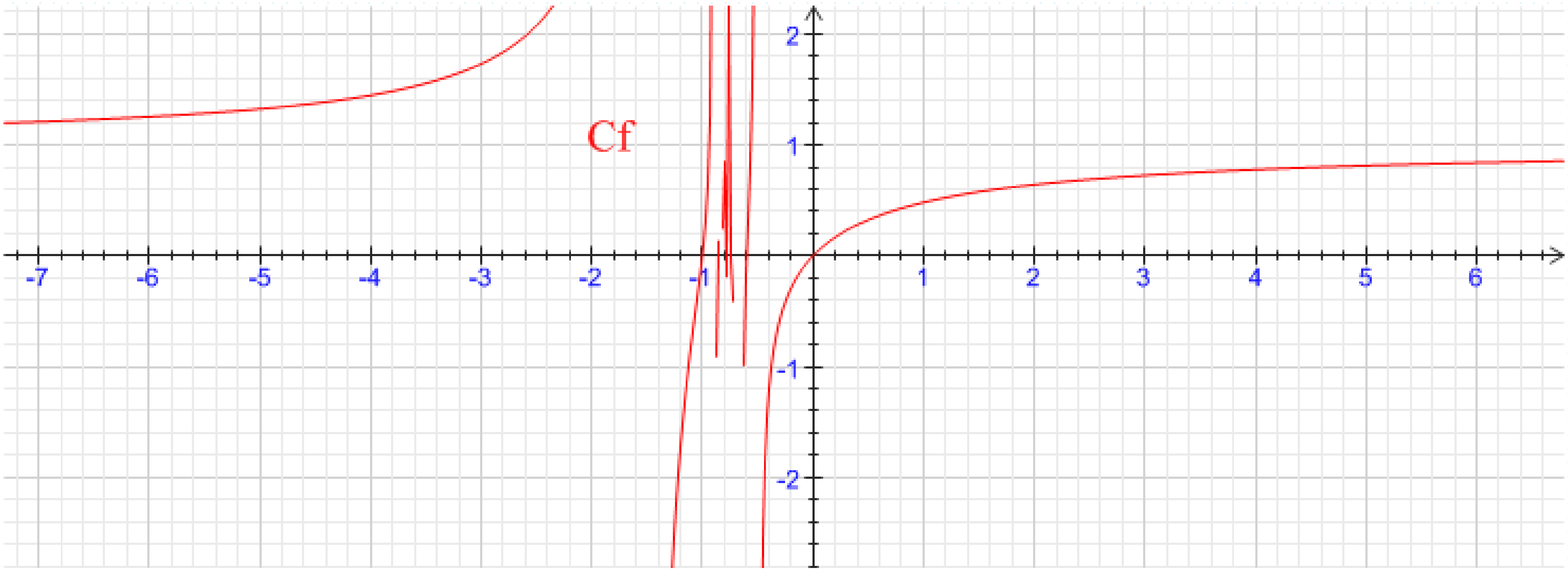
2) On pose $g(x) = \tan\left(\dfrac{\pi x}{4x+3}\right)$

Calculer $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x)$

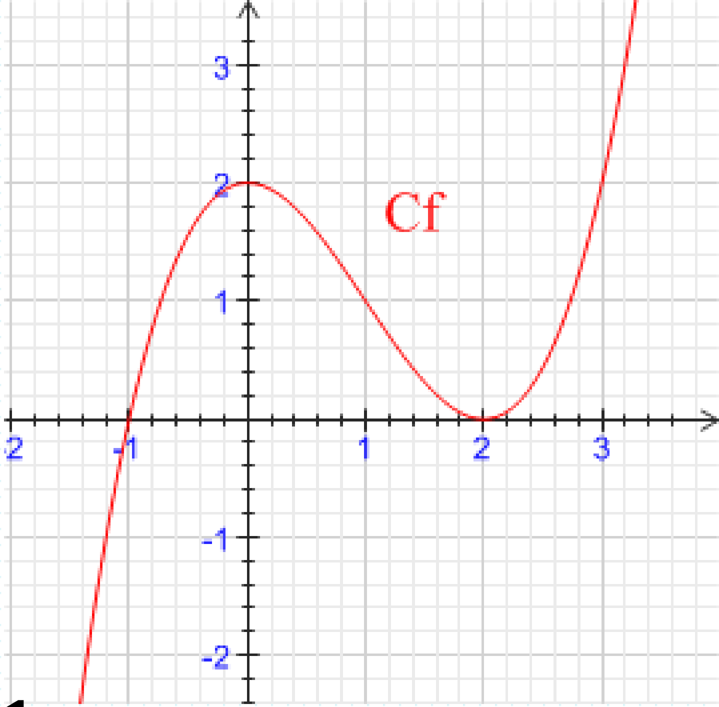
$$f(x) = (x+1)\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)$$



$$g(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4x+3}\right)$$



Exercice



Dans la figure ci-contre est représentée une fonction f définie sur IR

Déterminer:

$$\lim_{x\mapsto -\infty} f\left(\frac{-x+2}{x+3}\right),\ \lim_{x\mapsto +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right),\ \lim_{x\mapsto 0} x^2 f\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\mapsto \pi} f(1-\cos x)\ ,\ \lim_{x\mapsto 3} f\left(\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}\right)$$

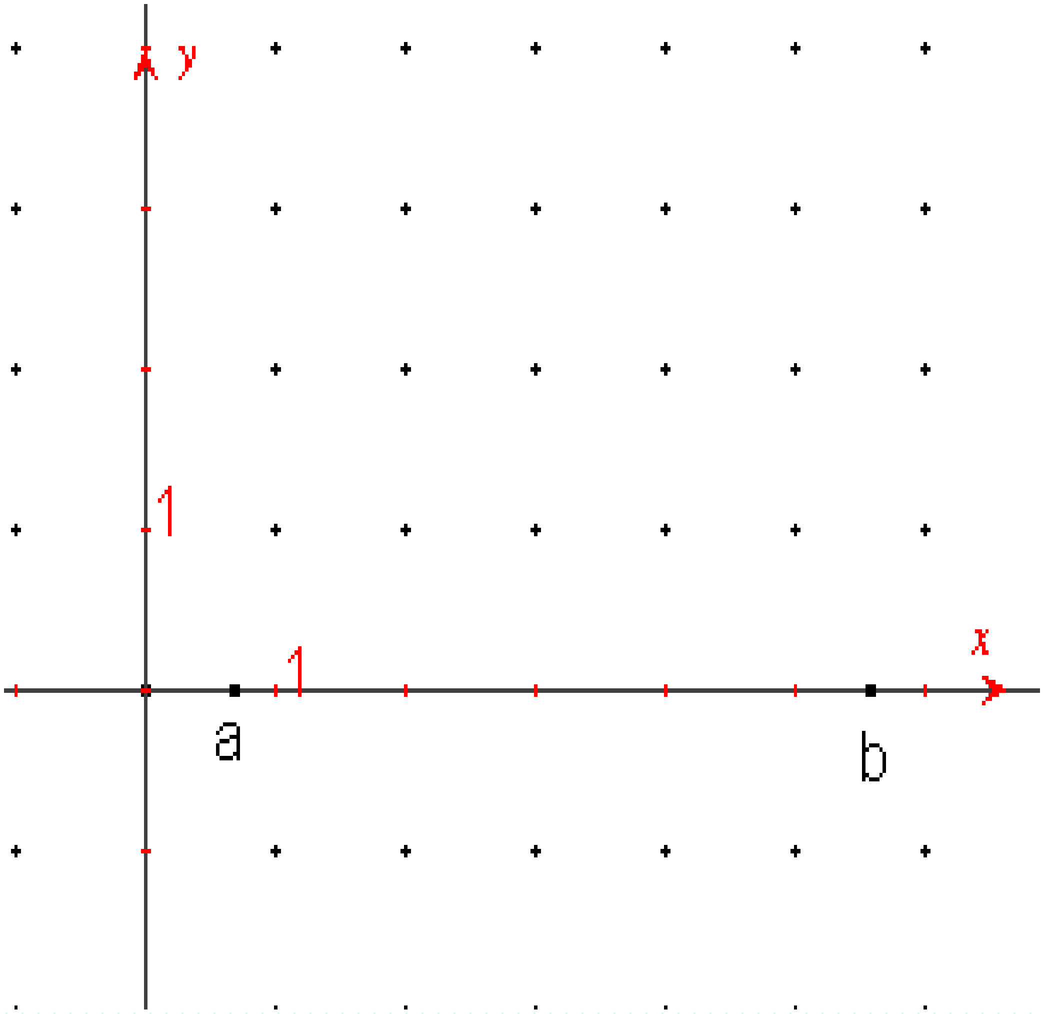
$$\lim_{x\mapsto 2} \frac{1-\cos\left[f(x)\right]}{\left[f(x)\right]^2}$$

IV. Image d’un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Activité

Dans chaque figure représenter graphiquement, si c’est possible, une fonction f **définie** sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ et satisfaisant aux conditions indiquées ci-contre ; préciser en plus $f<[a, b]>$.

Figure N°1



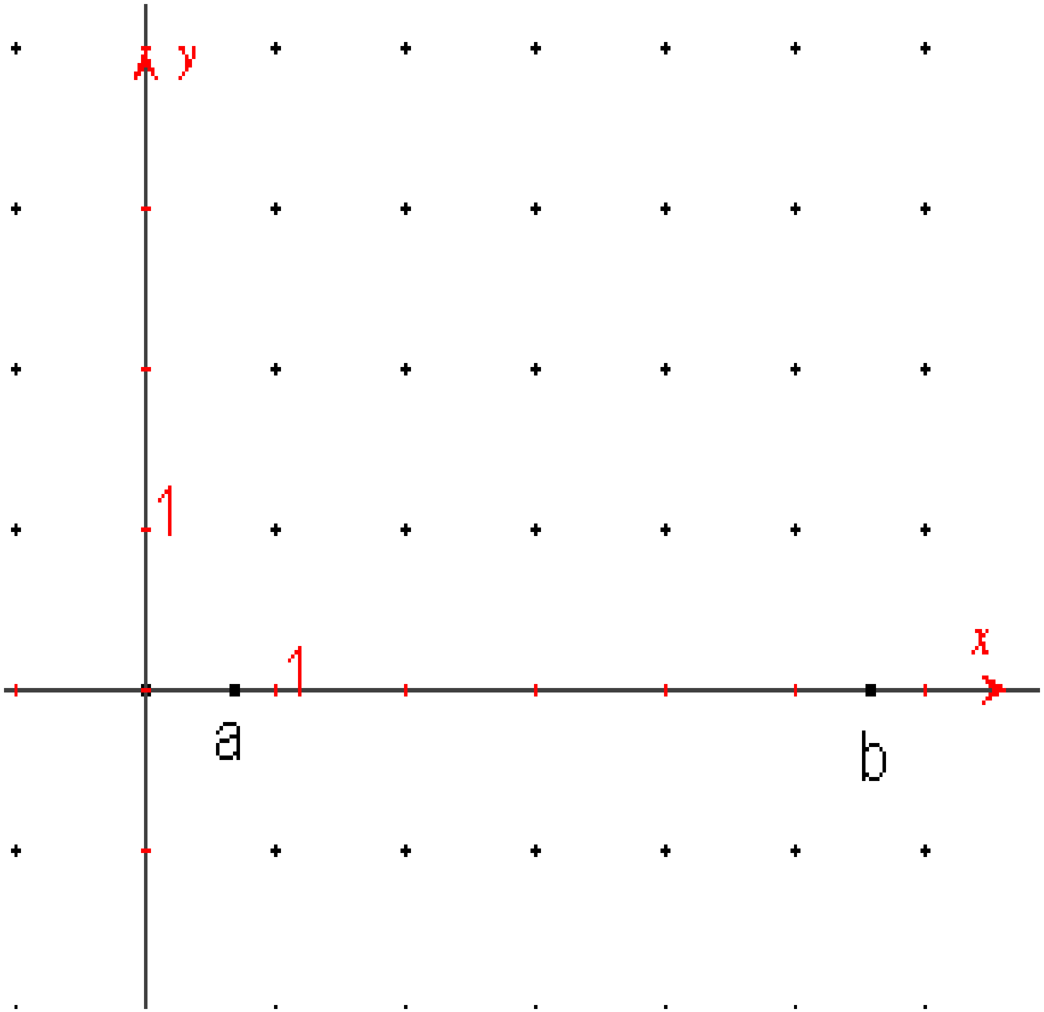
* f est continue sur [a, b]

* f<[a,b]> est un intervalle

* Compléter :

f<[a,b]> = …

Figure N°2



* f est n’est pas continue

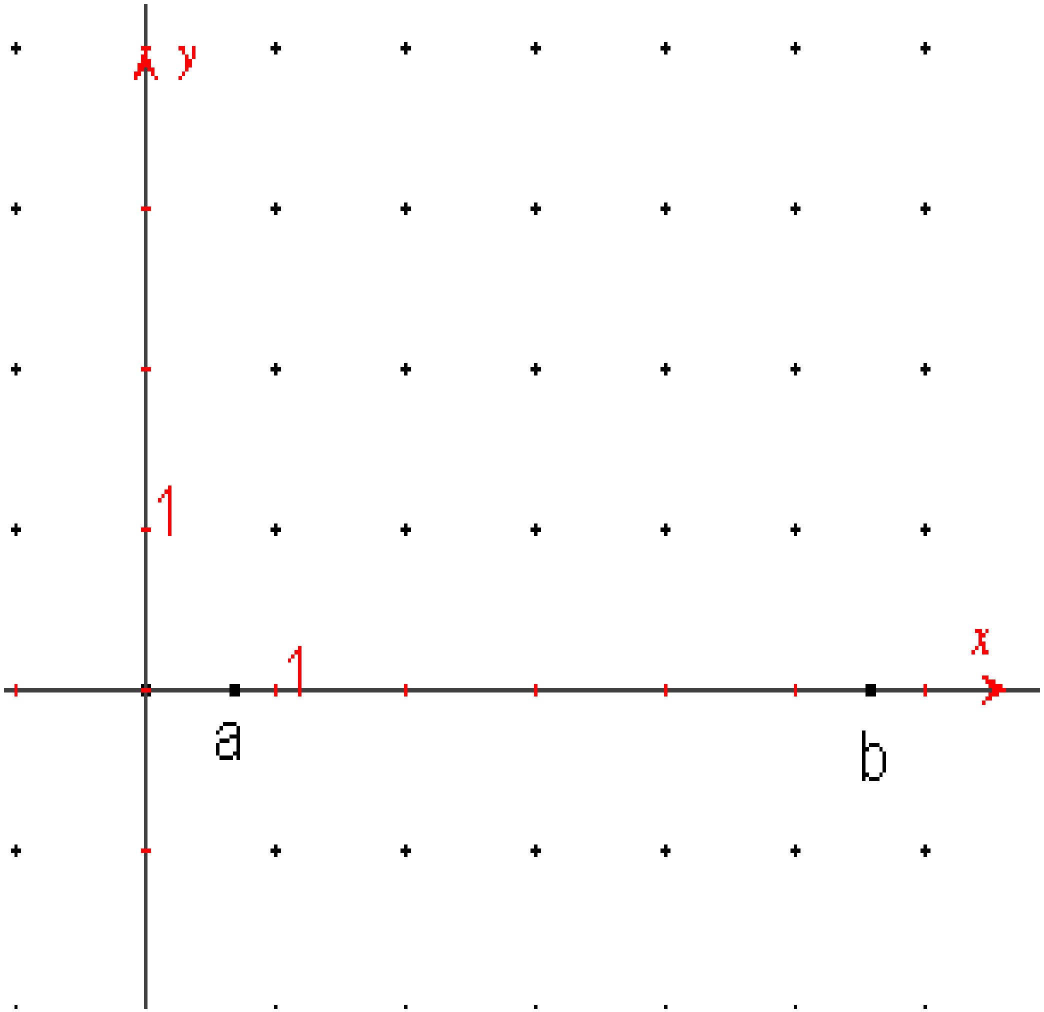
  sur [a, b]

* f<[a,b]> est un intervalle

* Compléter :

  f<[a,b]> = …

Figure N°3



* f n’est pas continue

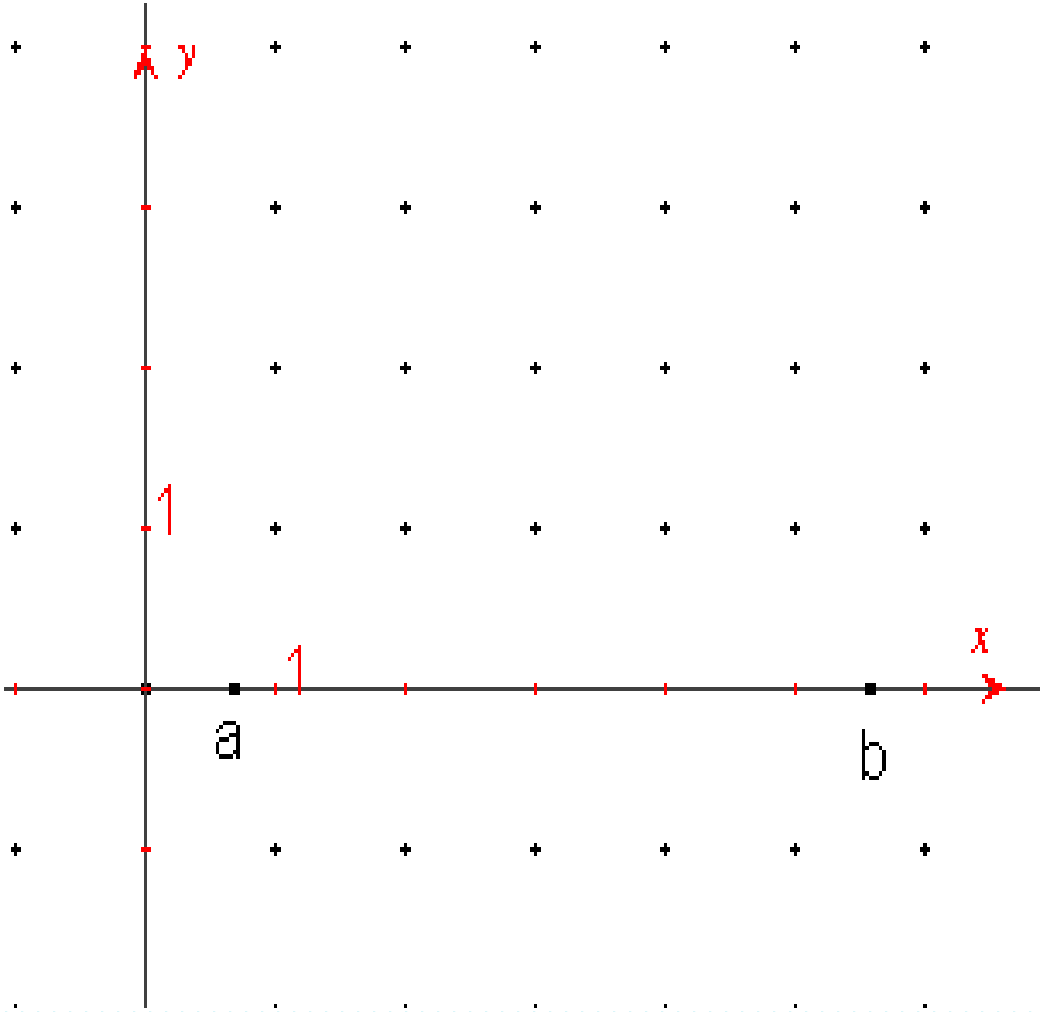
sur [a, b]

* f<[a,b]> n’est pas un intervalle

* Compléter :

f<[a,b]> = …

Figure N°4



* f est continue sur [a, b]

* f<[a,b]> n’est pas un intervalle

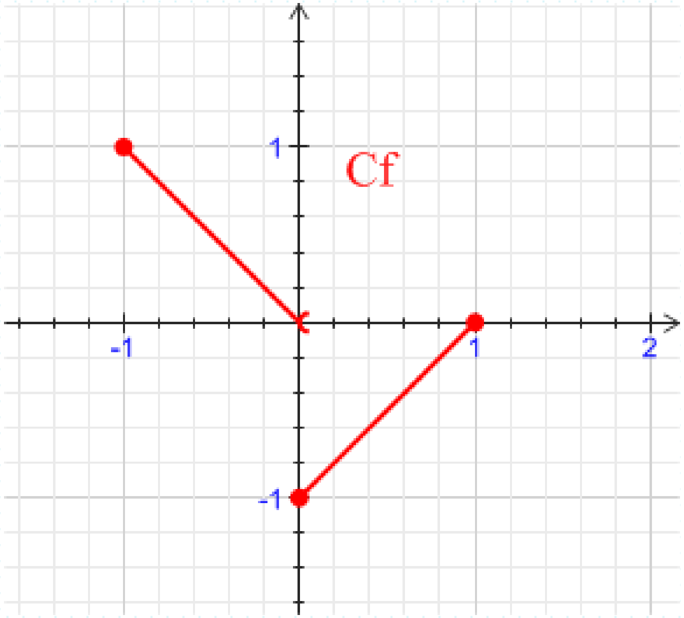
* Compléter :
f<[a,b]> = …

Théorème (admis)

L'image d'un intervalle par une fonction **continue** est un intervalle

NB: La continuité est une condition suffisante et non pas nécessaire! (figure N°2)

Contre exemple:

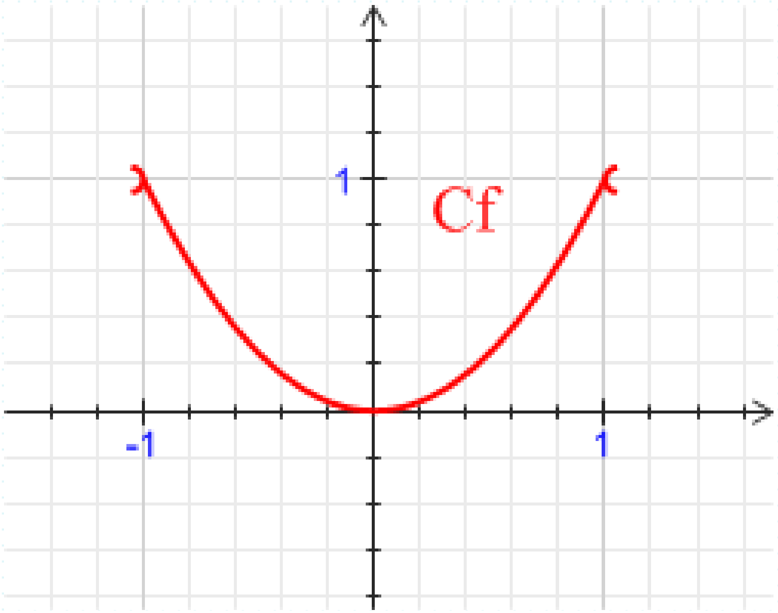


Théorème (admis)

L'image d'un intervalle **<u>fermé</u>** par une fonction **<u>continue</u>** est un intervalle **<u>fermé</u>**.

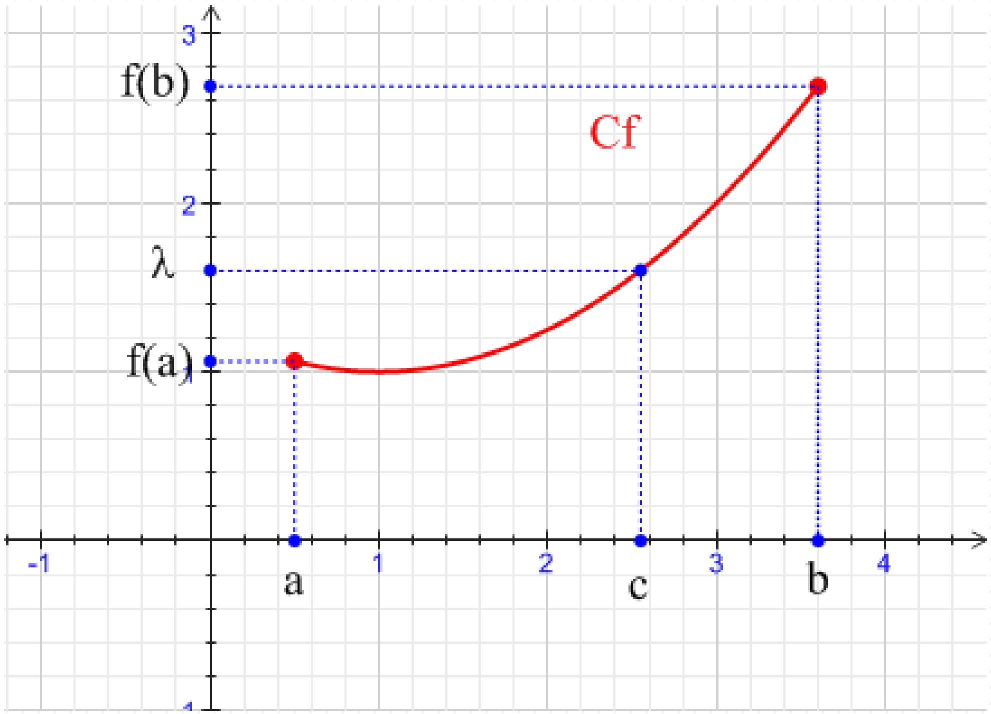
<u>NB:</u> L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue n'est pas nécessairement ouvert!

<u>Contre exemple:</u>

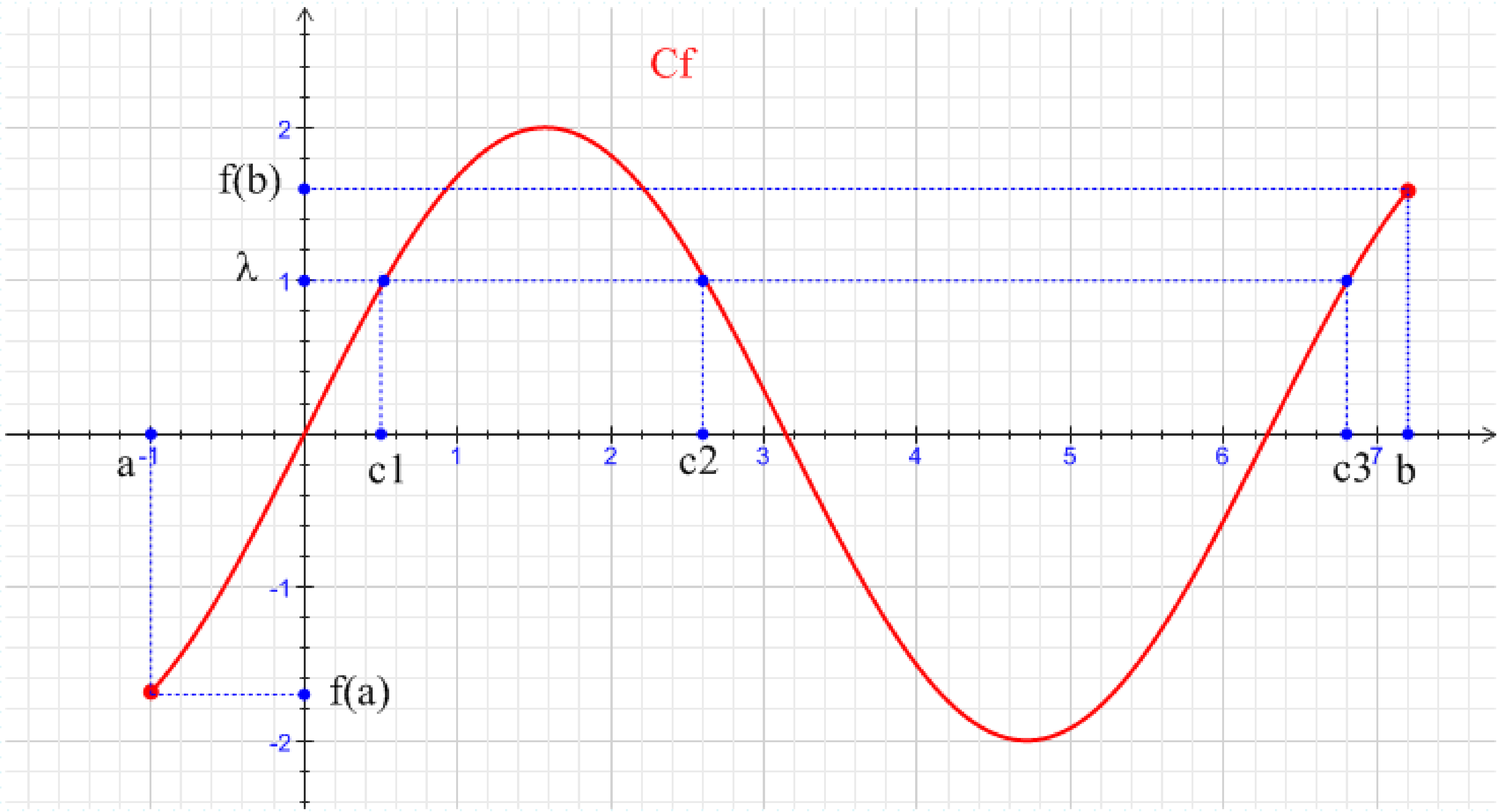


Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue sur un intervalle [a , b] alors pour tout réel λ, compris entre f(a) et f(b), il existe, au moins $c \in [a , b]$ tel que: **$f(c) = \lambda$**



NB: Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de c et non pas l'unicité!
L'unicité peut être assurée par la monotonie stricte de f.



Exercice N°1

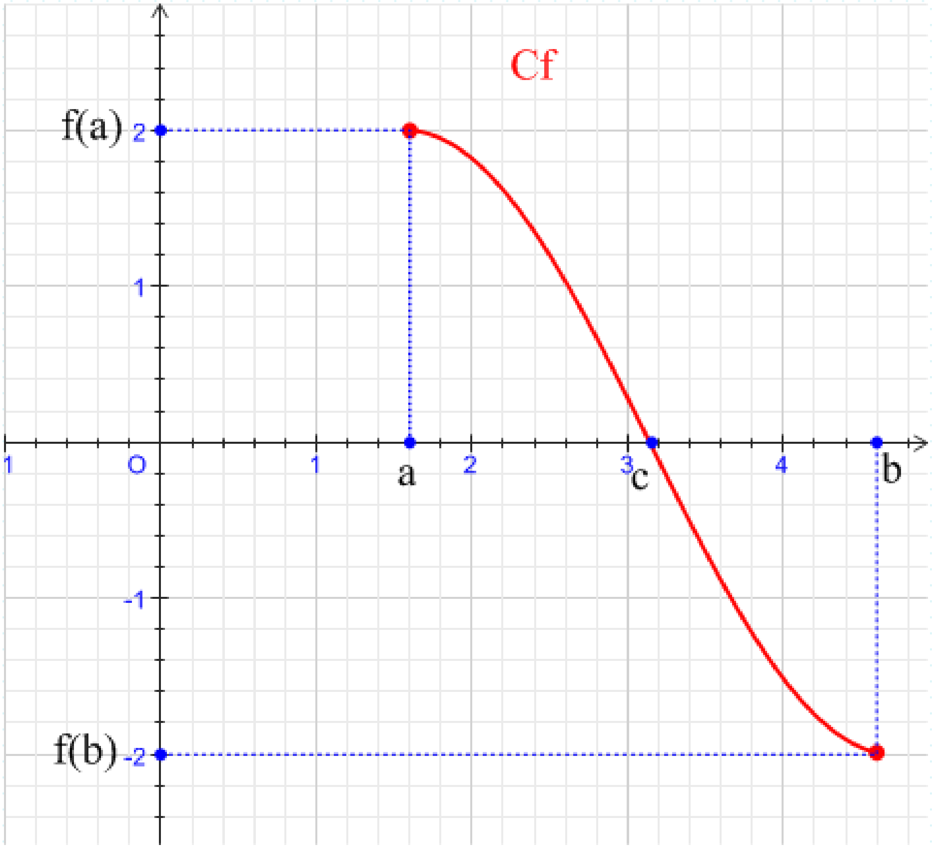
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soient α et β deux réels strictement positifs. Montrer qu'il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que l'on ait : $\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha+\beta) f(c)$.

Corollaire

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f(a) \times f(b) \leq 0 \end{cases}$

alors il existe, au moins, un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$



Exercice N°2

Soit f une fonction continue sur [a,b] et à valeurs dans [a,b] $(a < b)$

1) Montrer que l'équation :$f(x) = x$ admet au moins une solution $\alpha \in [a,b]$.
2) On suppose que f est dérivable sur [a,b] et que : $\forall x \in [a,b], f'(x) < 1$.
   Montrer que α est unique.

Exercice N°3

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ tel que :

$$f(a) < g(a) \text{ et } f(b) > g(b)$$

Démontrer l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ tel que : $f(c)=g(c)$.

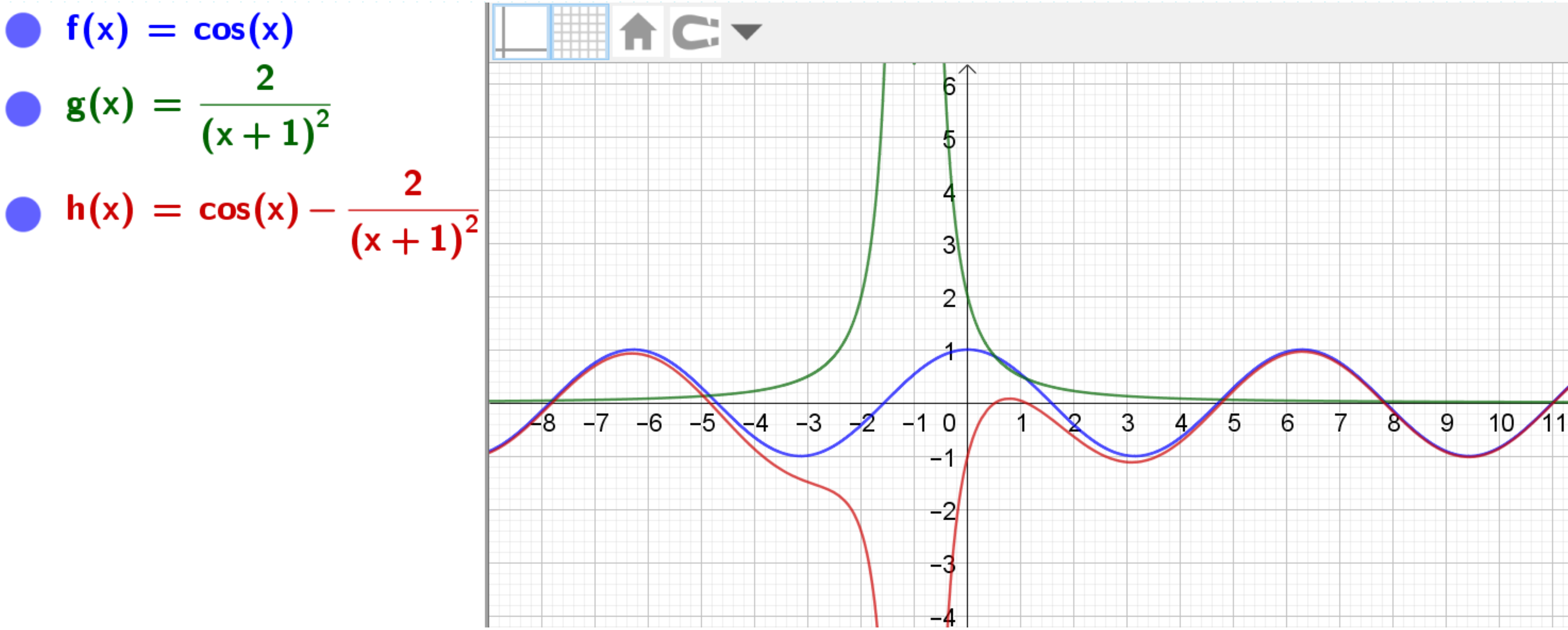
Exercice N°4

Montrer que l'équation: cosx $= \frac{2}{(x+1)^2}$ admet au moins une solution dans IR

Exercice N°4

Montrer que l'équation: $\cos x = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

admet au moins une solution dans IR



Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Si pour tout $x \in I$, $f(x) \neq 0$ alors f garde un signe constant sur I

<u>Démonstration:</u> traiter à titre d'exercice

Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

f est continue et strictement croissante sur un intervalle I

Intervalle I	Image de I par f
[a,b]	
]a, b[	
]a,b]	
[a, +∞[	
IR	
]-∞, b]	

Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

f est continue et strictement croissante sur un intervalle I

Intervalle I	Image de I par f
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$
$]a, b[$	$]\lim\limits_{a^+} f , \lim\limits_{b^-} f[$
$]a,b]$	$]\lim\limits_{a^+} f , f(b)]$
$[a, +\infty[$	$[f(a), \lim\limits_{+\infty} f [$
IR	$]\lim\limits_{-\infty} f , \lim\limits_{+\infty} f[$
$]-\infty, b]$	$]\lim\limits_{-\infty} f , f(b)]$

Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

f est continue et strictement décroissante sur un intervalle I

Intervalle I	Image de I par f
[a,b]	
]a, b[	
]a,b]	
[a, +∞[	
IR	
]-∞, b]	

Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

f est continue et strictement décroissante sur un intervalle I

Intervalle I	Image de I par f
$[a,b]$	$[f(b),f(a)]$
$]a, b[$	$]\lim\limits_{b^-} f , \lim\limits_{a^+} f[$
$]a,b]$	$[f(b), \lim\limits_{a^+} f]$
$[a, +\infty[$	$]\lim\limits_{+\infty} f,f(a)]$
IR	$]\lim\limits_{+\infty} f , \lim\limits_{-\infty} f[$
$]-\infty, b]$	$[f(b), \lim\limits_{-\infty} f [$

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme [a,b[(b finie ou infini)

•Si f est croissante et majorée alors elle possède une limite finie en b

•Si f est croissante et non majorée alors $\lim_{x \mapsto b} f(x) = +\infty$

•Si f est décroissante et minorée alors elle possède une limite finie en b

•Si f est décroissante et non minorée alors $\lim_{x \mapsto b} f(x) = -\infty$