Les nombres complexes

Cours élaboré par le prof: Chouihi

I. Définition et propriétés

Activité N°1

Résoudre dans IR chacune des équations d'inconnue z suivantes :

a) $2z^2 - 5z + 2 = 0$

b) $3z^2 + 4\sqrt{3}\,z + 4 = 0$

c) $z^2 - z + 1 = 0$

Activité N°2

On considère l'équation, d'inconnue z,

$$\textbf{(E) :}\ \mathbf{z^2 + \sqrt{3}\, z + 1 = o}$$

a) L'équation (E) admet elle des solutions réelles ?

b) En admettant qu'il existe un nombre imaginaire, noté i, vérifiant **$i^2 = -1$**, déterminer les solutions z_1 et z_2 de l'équations (E) .

c) Les solutions z_1 et z_2 sont elles des nombres réels?

Définitions

Il existe un ensemble appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, vérifiant les propriétés suivantes :

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$
2. Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que $\mathbf{i^2 = -1}$.
3. L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication, qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.
4. Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $z = x + iy$, où x et y sont deux réels.

Vocabulaires

L'écriture $z = x + iy$ (x et y réels) est appelée forme **algébrique** ou **cartésienne** de z

- Le réel x est appelé partie réelle de z et on le note **Re(z)**
- Le réel y est appelé partie imaginaire de z et on le note **Im(z)**
- z est réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$
- z est imaginaire si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$
- z est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$

et $\mathrm{Im}(z) \neq 0$

Activité N°2

Compléter le tableau suivant

Z = x + iy	Re(z)	Im(z)
5 + 8i		
	-2	13
11i		
… + 9i	-5	
-14		
0		
15 …..		-12

Exercice N°1

1/ Calculer : $(1 - i)^2$, $(1 - i)^3$, $(1 - i)^4$ et $(1 - i)^{4n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

2/ Mettre sous forme algébrique :

a/ $(5 - 7i) + (-15 + 23i)$; $(5 + 3i)(8 - 7i)$; $(-1 + 12i)(13 - 2i)$; $(3 + 4i)^2$;

b/ $\frac{1}{i}$; $\frac{1}{1+i}$; $\frac{1}{3-4i}$; $\frac{1}{-2+3i}$

c/ $z_1 = \frac{7+2i}{3-i}$ $\quad z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{1-7i}{3+4i}$ $\quad z_3 = \frac{5+2i}{1-i} + \frac{5-2i}{1+i}$

$\frac{1-i}{1+i}$; $\frac{2+3i}{3-4i}$ et $\frac{1+ia}{1-ia}$ (a réel)

3/ Vérifier les résultats obtenus avec votre calculatrice.

N.B:

•Il n'y a pas d'ordre C dans (et par conséquent un nombre complexe n'a pas de signe)
•Les calculs dans C s'effectuent de la même manière que dans IR en remplaçant, chaque fois que le cas se présente, i^2 par -1

Proriétés

Soient z et z' deux nombres complexes.

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' réels

1/ Déterminer, en justifiant, l'écriture algébrique:

$z + z' =$

$z.z' =$

$z^2 =$

$\dfrac{1}{z} =$

$\dfrac{z}{z'} =$

2/ Compléter

$z = 0 \Leftrightarrow$

$z = z' \Leftrightarrow$

$z^2 + z'^2 =$

Proriétés

Soient z et z’ deux nombres complexes.

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x’ et y’ réels

1/ Déterminer, en justifiant, l’écriture algébrique:

$z + z' = (x + x') + i(y + y')$

$z.z' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$

$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}$ (pour $z \neq 0$)

$\frac{z}{z'} = \frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2} - i\,\frac{(xy'-x'y)}{x'^2+y'^2}$ (pour $z' \neq 0$)

2/ Compléter

$z = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $y = 0$

$z = z' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$

$z^2 + z'^2 = (z + iz')(z - iz')$

Exercice N°2

Résoudre, dans C , les équations suivantes :

a) $3z + iz - 3 - 5i = 2z - iz + 4 - i$

b) $2z + 7 + 2i = 5z + 1 - 4i$

c) $iz + 2z - 5 + i = (4 - i)z + 7 - 3i$

d) $\frac{2z+1}{z-2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

e) $z^2 - 4z + 7 = 0$

f) $z^2 - 4iz - 4 - 2i = 0$

II. Interprétation géométrique

Théorème et définition

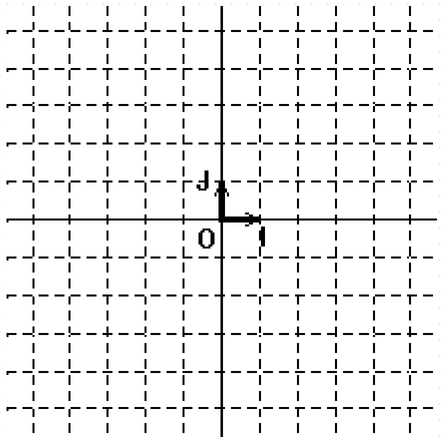
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$

- A tout nombre complexe $z = x + iy$ tel que x et y réels , on associe un unique point $M(x, y)$ du plan P.
- A tout point $M(x, y)$ du plan P, on associe un unique nombre complexe $z = x + iy$ tel que x et y réels.
- Le point M est appelé image de z, on écrit $M(z)$.
- Le nombre complexe z est appelé affixe de M, on écrit aff(z) ou z_M
- Le plan muni d'un repère orthonormé direct est appelé plan complexe.

Activité N°3

1/ Placer, dans le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, les points A, B et C d'affixes respectifs $3 - 2i$, $4 + i$ et $1 + 2i$.

Quelle est la nature du triangle ABC ?



2/ Déterminer les affixes des points : E = A*B,
F = A*C et K = B*C.

3/ Déterminer l'affixe du point :

a) G centre de gravité du triangle ABC.

b) D telle que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

4/ Déterminer l'affixe du vecteur :

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} - 3\overrightarrow{BC}$

b) $\vec{v} = 4\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} + 5\overrightarrow{BC}$

Exercice N°3

Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que :

1) A(1) , M(z) et M'($1+z^2$) soient alignés.

2) A(i) , M(z) et M'(iz) soient alignés.

III. Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Le conjugué du nombre complexe z = x + iy, avec x et y réels, est le nombre complexe x – iy, noté $\bar{z}$
Ainsi si z = x + iy , x et y réels alors $\bar{z}$ = x – iy

Exemples:

$\overline{3+2i} =$ $\overline{3-2i} =$

$\overline{-5-4i} =$ $\overline{12i} =$

$\overline{-32} =$ $\bar{0} =$

Propriétés

Compléter : Pour tous nombres complexes z et z '

$* \;\bar{\bar{z}} = \ldots \qquad * \;\overline{z + z'} = \ldots \qquad * \;\overline{zz'} = \ldots$

$* \;\overline{z^{n}} = \ldots , n \in IN^{*} \qquad * \;\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \ldots, \; z' \neq 0$

$* \; z + \bar{z} = \ldots$ et $z - \bar{z} = \ldots$

$* \;\mathrm{Re}(z) = \ldots$ et $\mathrm{Im}(z) = \ldots$

Propriétés

Compléter : Pour tous nombres complexes z et z '

$* \;\overline{\overline{z}} = z$ $\qquad * \;\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\qquad * \;\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$

$* \;\overline{z^n} = \overline{z}^{\,n}, \; n \in IN^*$ $\qquad * \;\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}, \quad z' \neq 0$

$* \;z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

$* \;\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

Propriétés (suite)

$*\left[z \text{ est réel}\right] \Leftrightarrow [....$

$*\left[z \text{ est imaginaire}\right] \Leftrightarrow [....$

$*\left[z \text{ est imaginaire pur}\right] \Leftrightarrow [....$

$*z = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = ...$

$$*\text{Si } z = x + iy \text{ alors } \begin{cases} z + \bar{z} = ... \\ z - \bar{z} = ... \\ z\bar{z} = ... \end{cases}$$

Propriétés (suite)

$*[z \text{ est réel}] \Leftrightarrow [\overline{z} = z]$

$*[z \text{ est imaginaire}] \Leftrightarrow [\overline{z} = -z]$

$*[z \text{ est imaginaire pur}] \Leftrightarrow [\overline{z} = -z \text{ et } z \neq 0]$

$*z = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = 0$

$$*\text{Si } z = x + iy \text{ alors } \begin{cases} z + \overline{z} = 2x \\ z - \overline{z} = 2iy \\ z\overline{z} = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Exercice N°4

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de -1, (x et y sont des réels). On note M le point du plan d'affixe z.

On pose: $Z = \dfrac{iz}{z+1}$.

1) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.

2) En déduire l'ensemble E des points M tels que $Re(Z) = 0$ et l'ensemble F des points M tels que $Im(Z) = 0$.

Exercice N°5

1) Résoudre dans C :

a) $z^2 - 3\bar{z} + 2 = 0$ b) $z^2 - \bar{z} + 1 = 0$

2) Déterminer et construire l'ensemble des points

M(z) tel que : $z\bar{z} + (z + \bar{z}) = 0$

IV. Forme trigonométrique et forme exponentielle d’un nombre complexe

1. Module d'un nombre complexe

Définition

Le module du nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, est le réel positif noté $|z|$ et défini par: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Si M est l'image de z alors **$|z| = OM$**

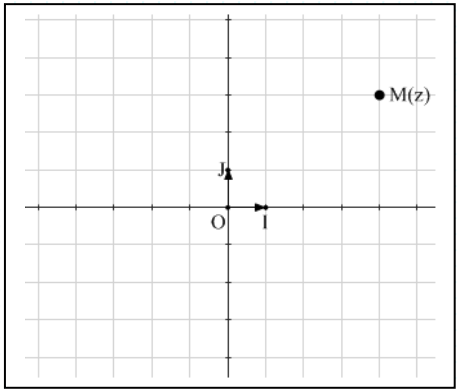
Exemples:

$|4+3i| =$ $\qquad$ $|4 - 3i| =$

$|-4 - 3i| =$ $\qquad$ $|1 + i| =$

Activité N°3

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ on a placé le point M d'affixe z.



a) Placer les points $M_1(\bar{z})$, $M_2(-z)$ et $M_3(-\bar{z})$.

b) Compléter:

- [Les affixes des points M et N sont conjuguées] $\Leftrightarrow$ [Les points M et N sont symétriques par rapport à ....
- [Les affixes des points M et N sont opposées] $\Leftrightarrow$ [Les points M et N sont symétriques par rapport à ....

c) Comparer $|z|$, $|-z|$ et $|-\bar{z}|$

Propriétés

Compléter, en justifiant :

Pour tous nombres complexes z et z', tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$*\left|z\right| = 0 \Leftrightarrow \ldots \qquad\qquad *\, z\bar{z} = \ldots$$

$$*\left|z\right| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = \ldots \qquad \Leftrightarrow \bar{z} = \ldots$$

$$*\left|zz'\right| = \ldots \qquad\qquad *\left|\frac{1}{z}\right| = \ldots \quad , \; z \neq 0$$

$$*\left|\frac{z'}{z}\right| = \ldots \quad , \; z \neq 0 \qquad\qquad \left|z^n\right| = \ldots$$

$$* \quad \ldots\ldots \leq \left|z + z'\right| \leq \ldots\ldots.$$

Propriétés

Compléter, en justifiant :

Pour tous nombres complexes z et z', tout $n \in \mathrm{IN}^*$

* $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ * $z\bar{z} = |z|^2$

* $|z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$

* $|zz'| = |z|.|z'|$ * $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, $z \neq 0$

* $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$, $z \neq 0$ $|z^n| = |z|^n$

* $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$

Exercice N°6

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes de modules 1 et tel que: $z_1z_2 \neq -1$.

On pose : $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2}$ et $Z' = \dfrac{z_1 - z_2}{1 + z_1z_2}$

1) Montrer que Z est réel.

2) Montrer que Z' est imaginaire.

Exercice N°7

Déterminer et construire l'ensemble des points M(z) tel que:

1/ $|z + 3 - i| = \sqrt{2}$

2/ $|z - 3 + 2i| = |4 - 3i|$

3/ $|\bar{z} + 1 - i| = 5$

4/ $|iz + 3 - 5i| = 2$

5/ $|z+1-3i| = |z - 2 + i|$

6/ $|z| = |\frac{1}{z}| = |1 - z|$

7/ $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right| = 1$

8/ $|z-i|^2 + |z + i|^2 = 4$

9/ $z^2 + \bar{z}^2 = 0$

10/ $z + \bar{z} = |z|$

Exercice N°8

Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que :

a) $z + \dfrac{4}{z}$ soit réel

b) $(z - 2i)(\overline{z} - 1)$ soit réel

c) $(z - 2i)(\overline{z} - 1)$ soit imaginaire pur.

d) $|z+1| = |z| + 1$

Exercice N°9

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, M et M' leurs images respectives dans le plan complexe.
Etablir l'équivalence:

$$|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow M' \in [OM)$$

2. Argument d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

Définition:

Soit M un point d'affixe z non nul, on appelle argument de z toute mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

Ainsi, si θ est une mesure en radians de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ alors on écrit: $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Application

Compléter

- $\arg(3) \equiv$ $\arg(-5) \equiv$

$\arg(x) \equiv \begin{cases} \\ \end{cases}$

- $\arg(8i) \equiv$ $\arg(-7i) \equiv$

$\arg(yi) \equiv \begin{cases} \\ \end{cases}$

- [z est un réel non nul] $\Leftrightarrow$ [$\arg(z) = \ldots\ldots\ldots$
- $[z \in \mathbb{R}_+^*] \Leftrightarrow [\arg(z) = \ldots\ldots\ldots$
- $[z \in \mathbb{R}_-^*] \Leftrightarrow [\arg(z) = \ldots\ldots\ldots$
- [z est imaginaire pur] $\Leftrightarrow$ [$\arg(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Activité N°4

Reprendre l'activité N°3 pour déterminer en fonction de arg(z): $\arg(\bar{z})$; $\arg(-z)$; $\arg(-\bar{z})$ et $\arg(kz)$ (k réel non nul).

3, Forme trigonométrique

N.B: Dans tout ce qui suit, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

1. Définition

Soit z un nombre complexe non nul, θ désigne un argument de z. L'écriture: **$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$** est appelée forme trigonométrique de z.

Si $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg(z)\ [2\pi]$ alors on écrit **$z = [r,\theta]$** (écriture polaire).

Activité N°5

Soit z un nombre complexe non nul.

On suppose que $z = x + iy$ et que $z = [r,\theta]$

Exprimer x et y en fonction de r et θ puis en déduire $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de r, x et y.

Application

a) Donner la forme trigonométrique de:

$1 + i$; $-1 + i\sqrt{3}$; $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{6}$

b) Donner la forme algébrique de:

$z_1 = [2, \frac{2\pi}{3}]$ et $z_2 = [\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}]$

4. Forme exponentielle

Définition

Le nombre complexe de module 1 et d'argument θ est noté $e^{i\theta}$ et on lit: exponentielle iθ.

On a ainsi: $\mathbf{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

Il découle de cette définition que si z est un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ alors on écrit : $\mathbf{z = r e^{i\theta}}$.

Cette écriture est dite écriture exponentielle de z.

<u>Conséquences:</u>

$\mathbf{e^{i0}} = \ldots$ $\mathbf{e^{i\pi}} = \ldots$ $\mathbf{e^{i\frac{\pi}{2}}} = \ldots$ $\mathbf{e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \ldots$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{e^{i(\theta+2k\pi)}} = \ldots$

Activité N°6

Déterminer la forme polaire et la forme exponentielle de z

- $z = \cos\theta + i\sin\theta =$

- $z = \cos\theta - i\sin\theta =$

- $z = -\cos\theta - i\sin\theta =$

- $z = -\cos\theta + i\sin\theta =$

2. Opérations sur les formes trigonométriques

a) Egalité

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, établir l'équivalence:

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z') \ [2\pi] \end{cases}$$

Application

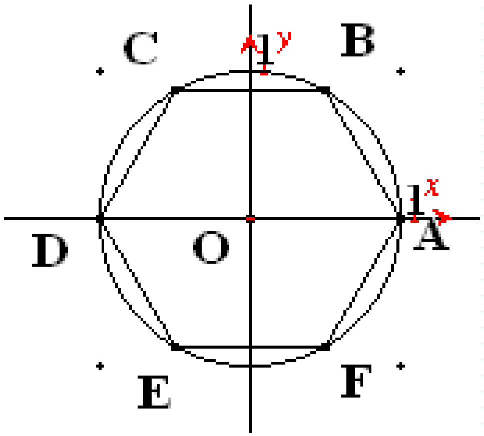
Soit a, b, θ et θ' des nombres réels (a et b non nuls) tel que: $ae^{i\theta} = be^{i\theta'}$.

Que peut on conjecturer?

b) Conjugué – opposé

Soit z un nombre complexe non nul.

$$\text{Si } z = [r, \theta] \text{ alors } \begin{cases} \overline{z} = \ldots\ldots. \\ -z = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$



Application

Dans un repère orthonormé direct, on a représenté ci-contre, l'hexagone régulier ABCDEF de centre O.

Donner le module et un argument de l'affixe de chacun des sommets de l'hexagone.

c) Produit

- Montrer que pour tous θ et θ' on a: $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

En déduire alors que:

- Si $z = [r,\theta]$ et $z' = [r',\theta']$ alors $zz' = \dots\dots\dots$
- $\arg(zz') \equiv \dots\dots\dots$

<u>Application</u>

Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$, $z' = 1 - i$ et $Z = zz'$

Donner les formes trigonométriques de z, z' et Z.

En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

d) Inverse

- Montrer que pour tout θ on a: $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

En déduire alors que:

- Si z = [r,θ] alors $\dfrac{1}{z} =$
- $\arg(\dfrac{1}{z}) \equiv \ldots$

Application

Donner la forme trigonométrique de $z = \dfrac{1}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$

e) Quotient

- Montrer que pour tous θ et θ' on a: $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

En déduire alors que:

- Si $z = [r,\theta]$ et $z' = [r',\theta']$ alors $\dfrac{z}{z'} = \ldots\ldots\ldots$

- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \ldots\ldots\ldots$

Application

Donner la forme trigonométrique de $z = \dfrac{-2+2i}{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}$

f) Exposant

- Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in IN^*$ on a: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
- Si $z = [r, \theta]$ alors $z^n = \ldots\ldots\ldots$
- $\arg(z^n) \equiv \ldots\ldots\ldots\ldots$

Application

1) Montrer que $(1 + i)^{2012}$ est nombre réel.
2) Déterminer le module et un argument de

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

3. Formule de Moivre – Formule d'Euler

- La formule établie en 2.f) permet d'écrire le résultat suivant connu sous le nom de formule de Moivre: pour $x \in IR$, $n \in IN$

$$\mathbf{(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)}$$

- A partir des égalités $\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x \end{cases}$

On obtient: $\begin{cases} e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \\ e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x \end{cases}$ et par suite les formules d'Euler:

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

Application

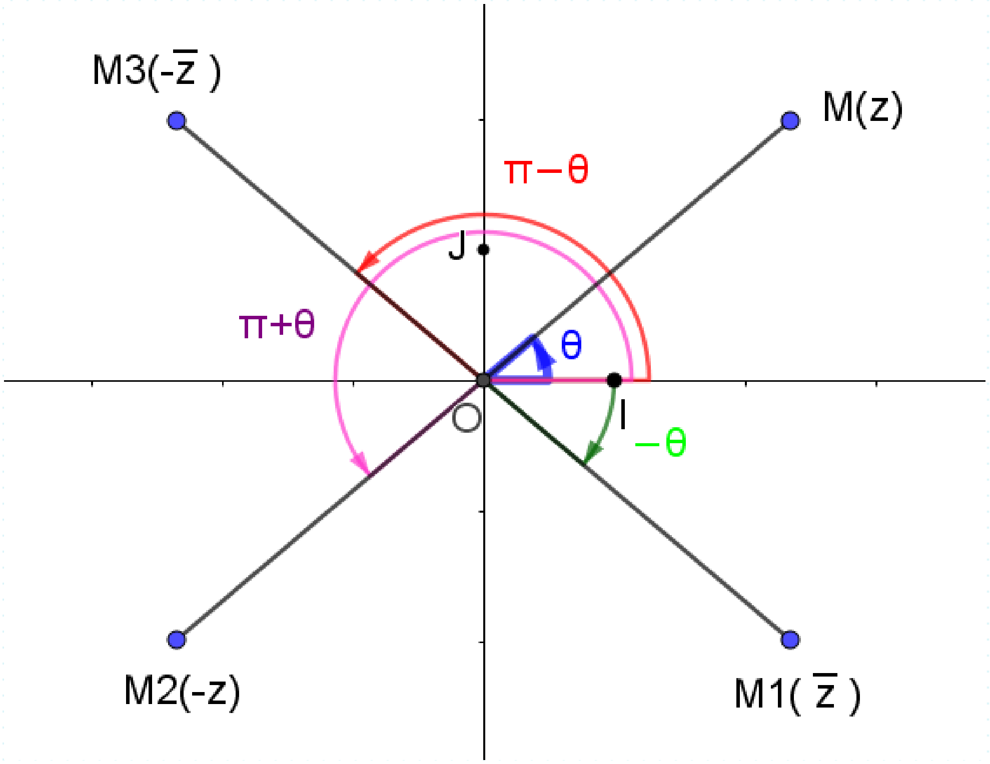
Simplifier

$$z = (1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n$$

n entier naturel

Récapitulation

- $\text{Arg}(z) \equiv (\overrightarrow{OI}, \widehat{\ \ }\overrightarrow{OM})[2\pi]$ & $|z| = OM$
- On écrit : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
- Si $z = [r, \theta] = re^{i\theta}$ alors
  - $\bar{z} = [r, -\theta] = re^{-i\theta}$
  - $-z = [r, \theta + \pi] = re^{i(\theta+\pi)}$
  - $-\bar{z} = [r, \pi-\theta] = re^{i(\pi-\theta)}$



5. Points méthodes

a. Déterminer, en justifiant, la forme polaire et la forme exponentielle de z

* $z = \sin\theta + i\cos\theta = \ldots$

* $z = \sin\theta - i\cos\theta = \ldots$

b. Ecrire sous la forme $a.e^{ix}$, $a \in IR$

* $1 + \cos\theta + i\sin\theta = \ldots$

* $1 - \cos\theta - i\sin\theta = \ldots$

* $1 + \cos\theta - i\sin\theta = \ldots$

* $1 + \sin\theta + i\cos\theta = \ldots$

* $i + \cos\theta + i\sin\theta = \ldots$

* $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = \ldots$

* $1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} = \ldots$

6. Exercice N°10

En utilisant les formes exponentielles, résoudre dans C les équations suivantes:

1) $z + |z| = 1 + i$

2) $z + |z| = -1 + i\sqrt{3}$

3) $|z| - z = 1 + i$

4) $|z| - z = -1 + i\sqrt{3}$

5) $z + |z| = a + ib$ **où a et b sont des réels avec a>0**

III. Nombres complexes et géométrie

1. Colinéarité- orthogonalité-alignement

On rappelle que le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, établir l'égalité:

$$(\vec{u},\vec{v}) \equiv \arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right)[2\pi].$$

1. Colinéarité- orthogonalité-alignement

Conséquences

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tel que $\vec{u}$ est non nul.
Etablir les équivalences:

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colineaires $\Leftrightarrow \dfrac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}$ est un réel.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \dfrac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}$ est imaginaire
- A, B et C (A≠B) sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in IR$

2. Interprétation géométrique

2. Soit A, B, C et D quatre points deux à deux distincts , établir les égalités:

- $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.

- $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{CD}{AB}(\cos\theta + i\sin\theta)$; où $\theta \equiv \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]$

Exercice N°11

Déterminer et construire l'ensemble des points M(z) tel que :

1/ $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

2/ $\arg(z) \equiv \arg(z + 2 + i)\ [2\pi]$

3/ $\frac{z-2}{z+1}$ soit réel 4/ $\frac{z-2}{z+1}$ soit imaginaire pur.

5/ $(z + i)^2$ soit réel 6/ $(z - 2i)^3$ soit réel

7/ $\frac{z+i}{z-2i} \in IR$ 8/ $\frac{z+2i}{iz+1} \in i\mathbb{R}$ 9/ $\frac{z+2i}{(1+i)z-1} \in IR_+$

10/ $Re(z^3) = Im(z^3)$

Exercice N°12

Déterminer et construire chacun des ensembles suivants :

1) $E = \{M(z) \in P \ / \ \arg(z - i) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]\}$

2) $F = \{M(z) \in P \ / \ \arg(\frac{z+i}{z-1}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\}$

3) $\Gamma = \{M(z) \in P \ / \ \arg(\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-1-i}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]\}$

4) $\Gamma' = \{M(z) \in P \ / \ \arg((\frac{z+1}{z-1})^3) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]\}$

IV. Racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

1. Définition

Soit a un nombre complexe donné et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On appelle racine $n^{ième}$ de a, tout nombre complexe z solution de l'équation: $z^n = a$.

Exemples:

- Vérifier que $2 + i$ est une racine cubique de $2 + 11i$.
- Vérifier que $1 – 2i$ est une racine $4^{ième}$ de $-7+24i$

2. Application

a. Donner la forme polaire de $2 + 2i$

b. Déterminer les racines cubiques de $2 + 2i$

3. Détermination

- Pour $a = 0$, $z^n = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- On suppose dans la suite que $a \neq 0$.

On pose $a = [r, \alpha]$ et $z = [\rho, \theta]$

En résolvant l'équation $z^n = a$ déduire que:

Théorème

Tout nombre complexe non nul a admet n racines $n^{\text{ième}}$ distinctes définies par: $z_k = [\rho, \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}]$, $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$, où ρ est un réel strictement positif vérifiant $\rho^n = |a|$.

Interprétation géométrique

On suppose que $n \geq 3$ et on désigne par $(M_k)_{k\in\{0,1,\ldots,n-1\}}$ les images des (z_k).

En calculant OM_k et $(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}})$ déduire que:

Les images des racines $n^{\text{ième}}$ de a ($a \neq 0$) sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon ρ tel que $\rho^n = |a|$.

<u>**N.B:**</u> pour $a = 1$ les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont appelées <u>**racines n^{ième} de l'unité**</u> et elles sont définies par:

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \; k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$$

Activité N°7 (racine cubique de l'unité)

On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) a) Donner la forme exponentielle de j et vérifier que j est une racine cubique de l'unité.

b) Vérifier que: $j^2 = \bar{j}$ et que $1 + j + j^2 = 0$

2) A, B et C étant des points d'affixes respectifs a, b et c. Montrer l'équivalence:

a/ ABC est équilatéral $\Leftrightarrow a+jb+j^2c = 0$ ou $a+j^2b+jc=0$

b/ ABC est équilatéral $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$

Exercice N°11

Soit $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$.

On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$

a) Calculer z^7

b) Calculer $S + T$ et $S.T$

c) En déduire les valeurs de S et T.

V. Equations dans C

1. Racine carré d'un nombre complexe (méthode algébrique)

Dans le paragraphe précédent on a prouvé que tout nombre complexe non nul admet deux racines carrés opposées, on se propose de déterminer une procédure pour trouver ces racines sous forme algébrique.

Activité N°8

On pose $z = x + iy$, établir l'équivalence:

$$z^2 = 4 + 3i \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = 3 \end{cases}$$

Déterminer alors les racines carrées de $4 + 3i$.

Généralisation

On pose $z = x + iy$ et $a = \alpha + i\beta$ (x, y, α et β réels)
Vérifier que la résolution de l'équation: $z^2 = a$ revient à la résolution du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ x^2 - y^2 = \alpha \\ \text{signe}(xy) = \text{signe}(\beta) \end{cases}$$

<u>Application</u>

Déterminer les racines carrés de $8 - 6i$; $5 - 12i$;
$5 + 2i\sqrt{6}$ et $9 + 40i$

2. Equation du second degré

Activité N°9

a) Déterminer les racines carrés de $-8+6i$

b) Résoudre dans C l'équation:

$$z^2-(3-i)z+4-3i=0$$

Généralisation

Soit a, b et c trois nombres complexes tel que: $a \neq 0$
On pose $P(z) = az^2 + bz + c$
P(z) est appelé trinôme du second degré à coefficients complexes.
La forme canonique (traitée en 2ième année) de z nous permet de conclure les résultats suivants:

- L'équation: $az^2 + bz + c = 0$ admet dans C deux solutions (distinctes ou confondues) $\mathbf{z' = \dfrac{-b-\delta}{2a}}$ **et** $\mathbf{z'' = \dfrac{-b+\delta}{2a}}$ où $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\delta^2 = \Delta$
- **$P(z) = a(z - z')(z - z'')$** **$z' + z'' = \dfrac{-b}{a}$ et $z'z'' = \dfrac{c}{a}$**
- **Si $a + b + c = 0$ alors $z' = 1$ et $z'' = \dfrac{c}{a}$**
- **Si $a - b + c = 0$ alors $z' = -1$ et $z'' = \dfrac{-c}{a}$**
- **Si $b = 2b'$** alors on peut utiliser **$\Delta' = b'^2 - ac$**

  et on aura: $\mathbf{z' = \dfrac{-b'-\delta'}{a}}$ **et** $\mathbf{z'' = \dfrac{-b'+\delta'}{a}}$ avec $\delta'^2 = \Delta'$.

Cas particulier

Dans le cas où a, b et c sont des réels ($a \neq 0$)

et $\Delta < 0$, le trinôme P(z) aura deux racines

conjuguées: $\mathbf{z' = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$ **et** $\mathbf{z'' = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$

Exercice N°12

Résoudre dans C chacune des équations suivantes:

1) $z^2 - 2(1 + 3i)z - 11 + 10i = 0$

2) $iz^2 - (1 - 5i)z - 2 + 6i = 0$

Exercice N°13

Soit $\theta \in [0,\pi]$

I. On considère l'équation (E_θ): $e^{-i\theta}z^2 - 2z + 2e^{i\theta} = 0$

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ) .

2) Donner le module et un argument de chacune des solutions de l'équation (E_θ).

II. Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectifs $z_1 = (1-i)e^{i\theta}$ et $z_2 = (1+i)e^{i\theta}$.

1) Déterminer l'ensemble C_1 des points M_1 lorsque θ décrit $[0,\pi]$

2) a) Montrer que : $\dfrac{z_2}{z_1} = i$.

b) En déduire que le triangle OM_1M_2 est isocèle et rectangle en O.

3) a) Montrer que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2}}) \equiv \theta + \dfrac{\pi}{2} [2\pi]$.

b) Déterminer θ pour que la droite (M_1M_2) soit parallèle à la droite d'équation : $y = x$.

2. Equation de degré ≥ 3

1ère exemple (équation bicarrée)

Résoudre dans C l'équation:

$$z^4 - (11 + 8i)z^2 - 60 - 32i = 0$$

$2^{\text{ième}}$ exemple

On pose $P(z) = z^3 + z^2 + (1 + 9i)z + 22 + 6i$.

a) Soit $y \in IR$, écrire sous forme algébrique $P(yi)$.
En déduire que $P(z)$ admet une racine imaginaire que l'on déterminera.

b) Déterminer les nombres complexes b et c tel que pour tout $z \in C$ on a: $P(z) = (z - 2i)(z^2 + bz + c)$

c) Résoudre alors l'équation $P(z) = 0$

$3^{ième}$ exemple

On pose $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$

a) Montrer que si z_0 est une racine de P(z) alors

il on ait de même pour $\overline{z_0}$ et $\frac{1}{z_0}$

b) Calculer P(1+i)

c) En déduire les solutions de l'équation P(z) = 0

d) Déduire une factorisation, dans IR, du polynôme P(z).

VI. Nombres complexes et transformation géométrique

Soit a et b deux nombres complexes tel que $a \neq 0$.
On se propose de caractériser, selon les valeurs de a l'application f du plan P dans P qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = az + b$.

1) **On suppose que $a = 1$**

Déterminer l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ puis caractériser f.

2) **On suppose que a ≠ 1**

Montrer que f admet un unique point invariant Ω dont on précisera l'affixe.

1^{ière} cas a$\in$IR*\ {1}

Exprimer $\overrightarrow{\Omega M'}$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega M}$ puis caractériser f.

2^{ième} cas: |a| = 1 et a ≠ 1

On pose a = $e^{i\theta}$.

Exprimer ΩM' en fonction de ΩM et évaluer $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})$.

Caractériser alors f.

Tableau récapitulatif

Ecriture complexe de f	Condition sur a	Nature de f	Eléments caractéristiques
$z' = az + b$	$a = 1$	translation	Vecteur d'affixe b
$z' = az + b$	$a \in IR^* \backslash \{1\}$	homothétie	Centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$ Rapport a
$z' = az + b$	$a = e^{i\theta}$ $\theta \neq 2k\pi$	rotation	Centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$ Angle θ
$z' = az + b$	$a = -1$	Symétrie centrale	Centre $\Omega(b/2)$

Exercice N°14

A tout nombre complexe a différent de 1 on associe l'application f_a de P dans P d'écriture complexe $z' = \left(\frac{1+a}{1-a}\right) z + 2i$

a) Déterminer l'ensemble Γ des points M(a) pour les quels f_a est une homothétie.

b) Déterminer l'ensemble Γ' des points M(a) pour les quels f_a est une rotation.

VII. Exercices de synthèses

Exercice N°15

A tout nombre réel $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on associe l'équation à variable complexe z

$$(E_\theta) : \ z^2 - 2i(1 + \sin\theta)z - 2(1 + \sin\theta) = 0 .$$

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) .

2/ On pose : $z_1 = i + e^{i\theta}$ et $z_2 = i - e^{-i\theta}$ et on désigne par M_1 et M_2 leurs images respectives dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

a) Déterminer la forme trigonométrique de z_1 et z_2.

b) Pour quelle valeur de θ, le triangle OM_1M_2 est il rectangle en O ?

c) Déterminer l'ensemble des points M_1 lorsque θ décrit $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

d) Montrer que M_2 est l'image de M_1 par une symétrie orthogonale que l'on précisera.

e) En déduire l'ensemble des points M_2 lorsque θ décrit $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice N°16

Soit ABC un triangle de sens direct. A l’extérieur de ABC on construit les triangles ACN et BAP isocèles et rectangles respectivement en C et B.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$; on désigne par a, b, c, n et p les affixes respectifs des points A, B, C, N et P.

1) a) Etablir l’égalité : $n - c = - i(a - c)$.

   b) Exprimer p en fonction de a et b.

Exercice N°16 (suite)

2) On considère le point M défini par :

$$\begin{cases} AM = BC \\ (\overrightarrow{BC}, \widehat{\ \ }\overrightarrow{AM}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

Exprimer m en fonction de a, b et c.

3) a) Etablir l'égalité : $m - b = -i(p - c)$.

b) En déduire que : $BM = CP$ et $(BM) \perp (CP)$.

4) Montrer que : $BN = CM$ et $(BN) \perp (CM)$.

5) En considérant le triangle BMC, montrer que les droites (AM), (BN) et (CP) sont concourantes.

Exercice N°17

1) On considère dans $\mathbb{C}$ les nombres complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β.

Montrer que $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul. Dans quel cas est-il nul ?

2) a) Soient deux points A et B d'un plan complexe muni d'un repère orthonormé d'origine O, d'affixes respectifs a et b. (On supposera que O, A et B ne sont pas alignés). Calculer, en fonction de a et b, l'affixe z du point I barycentre des points pondérés (A, $|b|$) et (B, $|a|$).

Exercice N°17 (suite)

b) A l'aide de 1) montrer que $\frac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif.

Exprimer Arg(z) en fonction de Arg(a) et Arg(b) .

En déduire que $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice du secteur [OA, OB]

Exercice N°3

Exercice N°3