Corrigé du DS, 3n 22/23

Exercice N°1.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{2^-} f = +\infty \qquad \lim\limits_{2^+} f = -\infty$ $\qquad$ 4×0,25

2) $\lim\limits_{-\infty} f = -3 \to \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+3 = 0 \to \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)+3} = +\infty$ car $f(x) > -3$ $\forall x < 2$ $\qquad$ 0,25

$f(x)+2x = [f(x) - (-x+7)] + (x+7)$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (-x+7) = 0 \text{ car } \Delta : y=-x+7 \text{ est une asymp obli à } \mathscr{C} \text{ en } +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+7 = +\infty \end{cases}$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+2x = +\infty$

0,1 $\qquad$ 0,1

. $\dfrac{f(x)+1}{f(x)+3} = \dfrac{1+\frac{1}{f(x)}}{1+\frac{3}{f(x)}}$ on a: $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty \to \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{f} = 0 \to \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)+1}{f(x)+3} = 1$

3) a) $\mathscr{C}_{-1} : \begin{cases} y = x \\ x \leq -1 \end{cases}$ et $\mathscr{C}'_{-1} : \begin{cases} y = -1 \\ x \geq -1 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{C}_1 : y = 3x-1 \qquad \mathscr{C}_4 : y = 1$

$\mathscr{C}_6 : y = -\frac{2}{3}x + 4$ $\qquad$ 4×0,25

b) $f'_g(-1) = 1 \qquad f'_d(-1) = 0 \qquad f'(4) = 0 \qquad f'(6) = -\frac{2}{3}$ $\qquad$ 4×0,25

4) $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{f(x)+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'_g(-1) = 1.$ $\qquad$ 0,25

. $\dfrac{f(x)+x+2}{x+1} = \dfrac{f(x)+1}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+1} = \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} + 1$

donc $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{f(x)+x+2}{x+1} = f'_d(-1)+1 = 1.$ $\qquad$ 0,1

. $\dfrac{f(x)+\sqrt{x+3}-3}{x-6} = \dfrac{f(x)-f(6)}{x-6} + \dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$

$= \dfrac{f(x)-f(6)}{x-6} + \dfrac{x-6}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)}$ $\qquad$ 0,1

$= \dfrac{f(x)-f(6)}{x-6} + \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+3}$

donc $\lim\limits_{x\to6} \dfrac{f(x)+\sqrt{x+3}-3}{x-6} = f'(6) + \dfrac{1}{6} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}.$

1/ Déterminer les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$.

2/ Déterminer, en justifiant, les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)+3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+2x]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)+1}{f(x)+3}$

3/ a/ Déterminer les équations réduites des tangentes et des demi-tangentes à la courbe C de f aux points d'abscisses respectives : (-1) ; 1 ; 4 et 6 (aucune justification n'est demandée)

b/ En déduire $f'_g(-1)$; $f'_d(-1)$; f '(4) et f '(6).

4/ Déterminer, en justifiant, les limites :

$\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{f(x)+1}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{f(x)+x+2}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to6} \frac{f(x)+\sqrt{x+3}-3}{x-6}$

Exercice N°2:

1) a) $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$. I.G: La droite d'éq: $y=2$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$. $\qquad$ 0,1

b) pour $x<0$ et $x \neq -1$ $\qquad f(x) = \dfrac{2x^2-3x+a}{x^2+x}$ $\qquad$ 1

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1} 2x^2-3x+a = 5+a \\ \lim\limits_{x\to-1} x^2+x = 0 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ pour que f admet une limite finie en -1 il faut que $a+5=0 \Leftrightarrow a=-5$. $\qquad$ condition nécessaire

pour $a=-5$ $\qquad f(x) = \dfrac{2x^2-3x-5}{x^2+x} = \dfrac{(x+1)(2x-5)}{x(x+1)} = \dfrac{2x-5}{x}$ $\qquad$ condition suffisante

$\longrightarrow \lim\limits_{x\to-1} f(x) = 7$ (finie)

cc: f est prolongeable par continuité en -1 ssi $a=-5$.

c) $\lim\limits_{1^-} f = ?$ pour $x \in [0,1[$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1} = \dfrac{x^2+3x-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3x}+2)}$

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-3x+a}{x^2+x} & \text{si } x<0 \text{ et } x\neq-1 \\ \frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1} & \text{si } 0\leq x<1 \\ \sqrt{4x^2-3x}+bx & \text{si } x\geq1 \end{cases}$

1/ a/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b/ Montrer que f est prolongeable par continuité en (-1) si et seulement si a = - 5.

c/ Calculer $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$.

d/ Montrer que f est continue en 1 si et seulement si b = $\frac{1}{4}$

On suppose dans la suite que a = -5 et b = $\frac{1}{4}$

2/ Montrer que la droite D : $y = \frac{9}{4}x - \frac{3}{4}$ est une asymptôte de la courbe C de f au voisinage de $+\infty$.

3/ a/ Montrer que f est dérivable en (-2) et que f '(-2) = $\frac{5}{4}$

b/ Montrer que f est dérivable en 2 et que f '(2) = $\frac{13\sqrt{10}+5}{20}$

$\longrightarrow f(x) = \dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3x}+2)} = \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+3x}+2} \longrightarrow \lim\limits_{1^-} f = \dfrac{5}{4}$ 0,5

b) $f(1) = 1+b$ donc f est continue en 1 ssi $\lim\limits_{1^-} f = f(1) \Leftrightarrow 1+b = \frac{5}{4} \Leftrightarrow b = \frac{1}{4}$. ($f$ est continue en 1^+) 0,5

2) pour $x \geq 1$ $f(x) - \left(\frac{9}{4}x - \frac{3}{4}\right) = \sqrt{4x^2-3x} + \frac{1}{4}x - \frac{9}{4}x + \frac{3}{4} = \sqrt{4x^2-3x} - 2x + \frac{3}{4}$

$$= \frac{-3x}{\sqrt{4x^2-3x}+2x} + \frac{3}{4} = \frac{-3\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{4-\frac{3}{x}}+2\right)} + \frac{3}{4} \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(\frac{9}{4}x - \frac{3}{4}\right) = 0$$

Alors la droite $D : y = \frac{9}{4}x - \frac{3}{4}$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ 0,75

3) a) pour $x < -1$ $f(x) = 2 - \frac{5}{x}$ (voir 1/b) dub en -2 ?

posons $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(-2)}{x+2}$, $x \neq -2$. $\varphi(x) = \dfrac{-\frac{5}{x} - \frac{5}{2}}{x+2} = \dfrac{-5(x+2)}{2x(x+2)} = \dfrac{-5}{2x} \longrightarrow \lim\limits_{-2} \varphi = \dfrac{5}{4}$ 1

$\longrightarrow f$ est dérivable en -2 et $f'(-2) = \frac{5}{4}$.

b) pour $x > 1$ $f(x) = \sqrt{4x^2-3x} + \frac{1}{4}x$ dub en 2 ? posons $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$, $x \neq 2$

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{4x^2-3x} + \frac{1}{4}x - \sqrt{10} - \frac{1}{2}}{x-2} = \frac{\sqrt{4x^2-3x} - \sqrt{10}}{x-2} + \frac{1}{4}\frac{(x-2)}{(x-2)} = \frac{4x^2-3x-10}{(x-2)(\sqrt{4x^2-3x}+\sqrt{10})} + \frac{1}{4}$$ 1

$$= \frac{(x-2)(4x+5)}{(x-2)(\sqrt{4x^2-3x}+\sqrt{10})} + \frac{1}{4} = \frac{4x+5}{\sqrt{4x^2-3x}+\sqrt{10}} + \frac{1}{4} \longrightarrow \lim_{2} \varphi = \frac{13}{2\sqrt{10}} + \frac{1}{4} = \frac{13\sqrt{10}+5}{20}$$

$\longrightarrow f$ est dérivable en 2 et $f'(2) = \dfrac{13\sqrt{10}+5}{20}$.

Exercice N° : 3 :

1) a) $\sin 8x = 2\sin 4x \cos 4x = 2(2\sin 2x \cos 2x)\cos 4x = 4(2\sin x \cos x)\cos 2x \cos 4x = 8 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x$

0,5 $\Longleftrightarrow 8 \cos x \cos 2x \cos 4x = \dfrac{\sin 8x}{\sin x}$ ($\sin x \neq 0$, $\forall x \neq k\pi$)

1/ a/ Montrer que pour tout $x \neq k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) : $8\cos x\cos(2x)\cos(4x) = \frac{\sin(8x)}{\sin x}$

b/ En déduire la valeur de $A = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right).\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right).\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$

0,5 b) $8A = \dfrac{\sin \frac{8\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} = \dfrac{\sin(\pi - \frac{\pi}{9})}{\sin(\frac{\pi}{9})} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}} = 1 \Longleftrightarrow A = \dfrac{1}{8}$.

2)

1,5

Coordonnées cartésiennes	A(-3, 3)	$B(-\sqrt{3}, 1)$	C(3,$\sqrt{3}$)	$D(2, -2)$
Coordonnées polaires	$A[3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}]$	B[2, $\frac{5\pi}{6}$]	$C[2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}]$	D[$2\sqrt{2}$, $\frac{-\pi}{4}$]

3) a) $4\cos(x - \frac{\pi}{3})\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 4\left[\cos x \cos\frac{\pi}{3} + \sin x \sin\frac{\pi}{3}\right]\left[\cos x \cos\frac{\pi}{3} - \sin x \sin\frac{\pi}{3}\right]$

0,5 $= (\cos x + \sqrt{3}\sin x)(\cos x - \sqrt{3}\sin x) = \cos^2 x - 3\sin^2 x$

3/ a/ Montrer que pour tout réel x, on a :

$cos^2x - 3sin^2x = 4\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

b/ Montrer que pour tous réels a et b, 2cosa.cosb = cos(a+b) + cos(a – b)

c/ En déduire que pour tout réel x,

$4\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2cos2x - 1$

b) $\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$ 0,5

$\xrightarrow{(+)} \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$

c) b) pour $a = x - \frac{\pi}{3}$ et $b = x + \frac{\pi}{3}$ donne : $2\cos(x-\frac{\pi}{3})\cos(x+\frac{\pi}{3}) = \cos(2x) + \cos(-\frac{2\pi}{3}) = \cos 2x - \frac{1}{2}$

0,5 $\longrightarrow 4\cos(x - \frac{\pi}{3})\cos(x+\frac{\pi}{3}) = 2\cos(2x) - 1$

4) a) $f(x) = 1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)$

0,5 $= 1 + 2\left[\cos 2x \cos\frac{\pi}{3} + \sin 2x \sin\frac{\pi}{3}\right] = 1 + 2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$

4/ Soit f(x) = 1 + cos2x + $\sqrt{3}$sin2x pour x∈IR.

a/ Montrer que f(x) = 1 + 2cos(2x − $\frac{\pi}{3}$)

b/ Résoudre dans [0,π] l'équation : f(x) = 0

0,5 b) $\begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in [0, \pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \\ 2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}] \end{cases} \Longleftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ d'où $S_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Exercice N°4 :

1) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}}) + (\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}}) \equiv -\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \equiv -\frac{7\pi}{6} \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \Longrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$ 0,5 ✓

$(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}}) \equiv -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi] \Longrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF}}) \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi]$ 0,5 ✓

$(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF}}) + (\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}}) \equiv -\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \equiv -\frac{3\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ 0,5 ✓

2) $(\widehat{\overrightarrow{AK},\overrightarrow{BF}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}}) [2\pi]$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AB}}) + \pi + (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}}) [2\pi]$ 1

$\equiv \frac{\pi}{3} + \pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\Longrightarrow (AK) \perp (BF)$

3) $M \in \Gamma \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

$\Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) [2\pi]$ 0,75

$\Leftrightarrow M \in \overset{\frown}{CB} \setminus \{B,C\}$ du cercle circonscrit à ABC

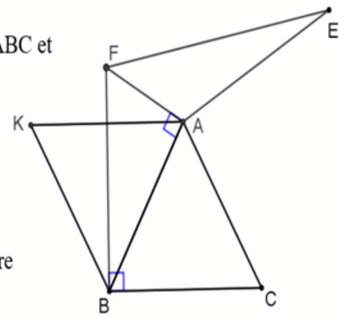
d'où $\Gamma = \overset{\frown}{CB} \setminus \{B,C\}$ du cercle $\mathcal{C}_{ABC}$

. $M \in \Gamma' \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MF}}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MF}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BF}}) [2\pi]$ 0,75

donc Γ' est l'arc $\overset{\frown}{FA} \setminus \{A,F\}$ du cercle circonscrit à ABF.

Exercice N°4 (4 points)

Sur la figure ci-contre les triangles ABC et AKB sont équilatéraux, les triangles ABF et BCF sont rectangles respectivement en A et en B et le triangle AEF est tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$



1) Déterminer, en justifiant, la mesure principale de chacun des angles : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}})$

2) Montrer que les droites (AK) et (BF) sont perpendiculaires.

3) Déterminer les ensembles $\Gamma = \{M \in P$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \}$ et $\Gamma' = \{M \in P$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MF}}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \}$