L. Privé.Ibn Khaldoun Kairouan | **Devoir de Synthèse N°1** | **Prof : Chouihi**

Le : 09-12-21 | **Durée : 2heures** | **Classe : 3M**

Exercice N°1 (4 points)

Etudier la limite de f en a dans chacun des cas suivants :

1/ $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-5x^2+7x-2}$; a = 2

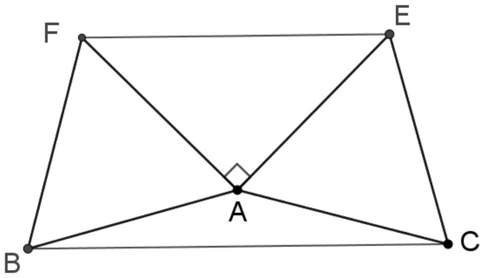
2/ $f(x) = \dfrac{x^2+x\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{x^2+2022x+2021}$; a = -1

3/ $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x-3}}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{4x+4}}$; a = 3

4/ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{5x-1}-4}{x-1}$; a = 1

Exercice N°2 (7 points)

Sur la figure ci-contre le triangle ABC est isocèle en A, le triangle AEF est rectangle en A et les triangles ACE et AFB sont équilatéraux.



1/ Sans justification, donner la mesure principale de chacun des angles :
$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$; $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF})$ et $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{AF})$.

2/ Déterminer, en justifiant, la mesure principale de chacun des angles :
$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{CE})$

3/ Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

4/ Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont orthogonaux.

5/ Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$

6/ On pose que AB = a avec $a \in \mathbb{R}_+^*$

a/ Calculer BC.

b/ On désigne par I le milieu du segment [EF].
Calculer $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}$ et en déduire que les droites (AI) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice N°3 (7 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ x^3-2x^2-x-1 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ \sqrt{x^2-2x+6}+x-1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

1/ a/ Justifier la continuité de f sur chacun des intervalles]-∞, 1[; [-1,1[et [1, +∞[

b/ Montrer que f est continue en -1.

c/ Etudier la continuité de f en 1.

2/ Pour $x \neq 3$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$. Etudier la limite de φ en 3.

3/ a/ Montrer que f est croissante sur [1, +∞[

b/ En déduire que la fonction h définie sur [1, +∞[par $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ est bornée sur [1, +∞[

4/ a/ En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha \in]1,2[$ tel que $f(\alpha) = 3$.

b/ Montrer, par le calcul, que $\alpha = \frac{5}{3}$.

Exercice N°4 (2 points)

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

On désigne par H le point défini par : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

a/ Calculer $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}$

b/ En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.