L. P. Kairouan	**Devoir de Synthèse N°1**	**Prof : Chouihi**
Le : 04-12-19	**Durée : 2heures**	**Classe : 3M3**

Exercice N°1 (6 points)

1/a) Recopiez puis compléter les formules suivantes :

$\cos(a-b) = \dots$ $\cos(a+b) = \dots$ $\sin(a+b) = \dots$ $\sin(a-b) = \dots$

b) En déduire $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$

2/ a) Montrer l'égalité : $\sin a.\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

b) En déduire que : $\sin(a-b).\sin(a+b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

c) Montrer alors que : $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

3/ a) Montrer que : $\sin(2x).\sin(4x) = \sin^2(3x) - \sin^2 x$.

b) Montrer alors que : $4\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right).\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) = 3 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

c) Montrer que : $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

d) En déduire que : $\sin\left(\frac{\pi}{9}\right).\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right).\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$

Exercice N°2 (8 points)

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^3+7x^2+3x-6}{x+2} \text{ si } x < -2 \\ f(x) = x^3+2x^2-1 \text{ si } x \in]-2,1[\\ f(x) = \sqrt{x^2+3}+x-1 \text{ si } x \succ 1 \\ f(-2) = -1 \text{ et } f(1) = 2 \end{cases}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x)$.

2) a) Montrer que f est continue en 1.

b) pour $x \neq 1$, on pose $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Etudier la limite de φ quand x tend vers 1.

3) Montrer que f est continue en (-2).

3) Justifier la continuité de f sur chacun des intervalles :

a) $]-\infty, -2[$ b) $]-2,1[$ c) $]1, +\infty[$

4) On pose $g(x) = f(x) + x$

a) Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]-2, 1[$.

b) Donner un encadrement d'amplitude 0,2 de α.

c) Montrer que : $\alpha^2 = \frac{1-\alpha}{2+\alpha}$

Exercice N°3 (6 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC isocèle en A et tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. On note $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

1) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

2) Soit E le point défini par AE = AC et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{-77\pi}{8}[2\pi]$

a) Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$.

b) Montrer que les droites (BC) et (AE) sont parallèles.

c) Calculer $\widehat{AEB}$ et $\widehat{AEC}$. En déduire que $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$.

3) On désigne par B' le projeté orthogonal de B sur (AC) et par C' le projeté orthogonal de C sur (AB).

a) Montrer que les points B, C, B' et C' sont cocycliques (c-à-d : situés sur un même cercle) et en déduire que $2(\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'C}) \equiv 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})[2\pi]$.

b) Montrer que les droites (B'C') et (BC) sont parallèles.