L. P. Kairouan	**Devoir de Synthèse N°1**	**Prof : Chouihi**
Le : 05-12-18	**Durée : 2heures**	**Classe : $3M_1$**

Exercice N°1 (6 points)

1/a) Recopiez puis compléter les formules suivantes :

$\cos(a-b) = \dots$ $\cos(a+b) = \dots$ $\sin(a+b) = \dots$ $\sin(a-b) = \dots$

b) En déduire $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$

2/ Montrer les égalités suivantes :

a) $\cos a.\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

b) $\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

c) $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$ d) $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos(\frac{x-y}{2})$

3/ Résoudre dans IR puis dans $]-\pi,\pi]$:

a) $2\cos 2x + \sqrt{3} = 0$ b) $\cos x - \sin x + 1 = 0$

Exercice N°2 (7 points)

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+2} \text{ si } x < -2 \\ f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 3 \text{ si } x \in [-2, 2] \\ f(x) = \sqrt{x^2+5} + x \text{ si } x \succ 2 \end{cases}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$

2) a) Etudier la continuité de en (-2).

b) Etudier la continuité de f en 2.

3) Justifier la continuité de f sur chacun des intervalles :

a) $]-\infty, -2[$ b) $[-2,2]$ c) $]2, +\infty[$

4) Pour $x \neq 2$, on pose $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

a) Etudier la limite de φ en 2.

b) La fonction φ est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

Exercice N°3 (7 points)

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABCD un trapèze isocèle inscrit dans un cercle Γ de centre O tel que: $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) \equiv \dfrac{-77\pi}{8}[2\pi]$.

Voir figure sur la feuille jointe que l'on complétera progressivement.

1) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$ et de $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

2) Les diagonales (AC) et (BD) se coupent en M.

a) Montrer que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)[2\pi]$.

En déduire que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$

b) On suppose que A et B sont fixes et C et D varient sur l'arc orienté BA privé de A et B. Déterminer l'ensemble des points M.

3) On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle OAB.

La parallèle à (BC) passant par M recoupe $\mathscr{C}$ en I.

a) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$.

b) Justifier les congruences :

$\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MI}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right)[2\pi]$, $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MI}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right)[2\pi]$ et

$\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right)[2\pi]$

c) En déduire que la droite (AI) est tangente au cercle Γ.