Exercice N°1 (4 points)

Pour tout entier naturel non nul n on pose $I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$

1/ En intégrant par parties, calculer I_1.

2/ a/ Montrer que la suite (I_n) est décroissante et à termes positifs. Que peut-on conclure ?

b/ Montrer que pour tout $x \in [1,e]$, $\ln x \leq \frac{x}{e}$.

c/ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3/ a/ Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$

b/ Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $\frac{e^3}{n+4} \leq I_n \leq \frac{e^3}{n+3}$

c/ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

Exercice N°2 (6 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct ABC de centre O.
(Voir figure sur la feuille annexe).
On désigne par: $K = B*C$, $H = S_O(A)$ et $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

1/ Faire une figure.

2/ Soit S la similitude directe telle que S(A) = B et S(C) = K.

a/ Déterminer le rapport de S et une mesure de son angle.

b/ Déterminer les images par S des droites (OA) et (CH) et en déduire que H est le centre de S.

3/ On désigne par S_1 la similitude directe de centre B qui envoie A en O et par S_2 la similitude directe de centre C qui envoie O en A

a/ On pose $f = S_2 o S_1$. Montrer que f est la rotation de centre A et d'angle $\frac{-\pi}{3}$.

b/ Déterminer $S_1(C)$. En déduire $S_2(H) = B$.

4/ On pose $g = SofoS_{(AB)}$

a/ Vérifier que Sof(A) = B.

b/ Montrer que Sof est une homothétie dont on précisera le rapport et construire son centre Ω.

c/ Déduire que g est une similitude indirecte que l'on caractérisera.

Exercice N°3 (4 points)

1) Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln x + x$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

2) Dans la figure sur la feuille annexe, C_g et C_h sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ des fonctions g et h définies sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = \ln x$. C_g et C_h se coupent en un point d'abscisse β .

a) Par une lecture graphique donner le signe de f '(x).

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Montrer que $f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$.

3) On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Etudier la position relative des courbes C_f et C_h

b) Montrer que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0{,}4 < x_1 < 0{,}5$ et $3{,}8 < x_2 < 3{,}9$.

c) Placer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points A $(\beta, 0)$ et B$(0, \frac{1}{\beta})$ et en déduire une construction du point de coordonnées $(\beta, f(\beta))$.

d) Tracer C_f.

4) Pour tout réel t de $]0, +\infty[\setminus \{\beta\}$ on désigne par A(t) l'aire de la partie du plan S(t) limitée par les courbes C_g et C_h et la droite d'équation x = t.

a) Montrer que pour tout réel $t \in]0, +\infty[\setminus \{\beta\}$; $A(t) = f(\beta) - f(t)$.

b) Soit $t_0 > \beta$. Hachurer $S(t_0)$.

c) Montrer qu'il existe un réel unique t_1 dans $]0, \beta[$ tel que $A(t_1) = A(t_0)$.
Hachurer $S(t_1)$.

Exercice N°4 (4 points)

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur N par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 2x_n + 3 \text{ ; } n \in \mathbb{IN} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_0 = 3 \\ y_{n+1} = 2y_n - 1 \text{ ; } n \in \mathbb{IN} \end{cases}$$

1/ Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+2} - 3$.

2/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{IN}$, y_n et y_{n+1} sont premiers entre eux ?

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $2y_n - x_n = 5$.

b) Exprimer y_n en fonction de n.

c) En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

d) On note d_n le PGCD de x_n et y_n pour tout entier naturel n.
Démontrer que l'on a: $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice N°5 (2 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Caractériser l'application f du plan P dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que :

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

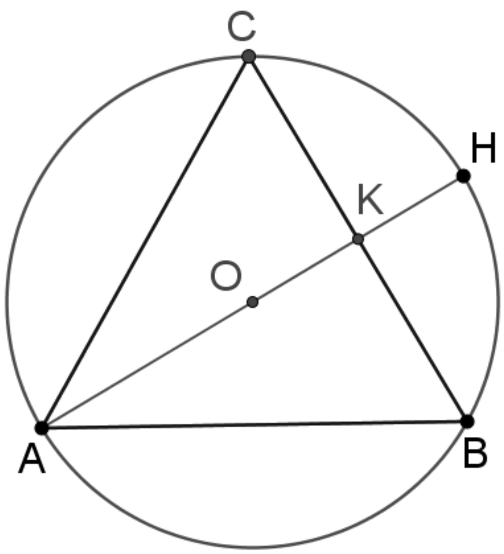
2) Caractériser l'application g du plan P dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que :

$$z' = \left(\frac{9-12i}{5}\right)\bar{z} - 4 + 2i.$$

Feuille à remettre

Nom & prénom : ……………………………………………………………………………….

Exercice N°2



Exercice N°3