Lycée pilote Kairouan
Année scolaire 2021
Le : 27 – 05 – 21

Devoir de synthèse N°2
Bac Maths
Durée : 4heures

Pr: Troudi & Chouihi

Exercice 1 (4 points)

1) Résoudre dans ℕ l'équation (E) : $x^2 \equiv -1(mod5)$

2) Soit p un nombre premier tel que p = 4k + 3 , k ∈ ℕ et n un entier naturel tel que : $n^2+1 \equiv 0(modp)$

a) Montrer que $(n^2)^{2k+1} \equiv -1(modp)$

b) Montrer que p et n sont premiers entre eux

c) En déduire que $(n^2)^{2k+1} \equiv 1(modp)$

3) De ce qui précède, montrer que l'équation : $n^2+1 \equiv 0(modp)$ n'admet pas de solutions dans ℕ

4) Résoudre dans ℕ : $\begin{cases} n^2-9 \equiv\ 0\ (\ mod\ 7\ ) \\ n^2+2n+13 \equiv\ 0\ (\ mod\ 11\ ) \end{cases}$

Exercice 2 (4 points)

NB : Les questions 1) , 2) et 3) de cet exercice sont indépendantes.

1) Dans la ville de Kairouan, 4% de la population sont atteint du covid 19 .
Un dépistage a donné les résultats suivants :
- Chez les personnes porteurs du virus 97% ont un test positif.
- Chez les personnes seins 99% ont un test négatif.

Une personne est choisie au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade sachant qu'elle a eu un test positif.

2) Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.
Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à 0,2.
Le prix de chaque trajet est de dix dinars, en cas de fraude l'amende est de cent dinars. Ali fraude Systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.

a) On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de trajets contrôlés. Déterminer l'espérance mathématique E(X).

b) On désigne par Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le Fraudeur. Justifier l'égalité $Y = 400 - 100X$ puis calculer l'espérance mathématique de Y.

3) Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.
La probabilité que le joueur gagne la première partie est 0,8. Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :
- S'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05
- S'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement « le joueur gagne la $n^{\text{-ième}}$ partie », et on note p_n la probabilité de l'événement E_n.

a)Etablir l'égalité : $p_{n+1} = 0{,}05\ p_n + 0{,}9$

b) Montrer que pour tout n∈IN*, $p_n = \frac{18}{19} - \frac{14}{95} \times (0{,}05)^{n-1}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 3 (6points)

Dans le plan oriente P on donne un cercle ($\mathcal{C}$) de centre O de diamètre [AI] ; soit D le point de ($\mathcal{C}$) tel que : $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OD}}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et R_1 La rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

1) Montrer que $R_1 = S_{(AI)} o S_{(AD)}$
2) le cercle ($\mathcal{C}$ ') de centre I passant par O recoupe($\mathcal{C}$) en D ' ; montrer que $R_1(D) = D'$
3) Soit R_2 la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et t = $R_2 o R_1$
   a) Construire le point B = $R_1(I)$ puis montrer que D' est le milieu de [BI]
   b) Montrer que t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
   c) Soit C est le point diamétralement apposé a D sur ($\mathcal{C}$') . Montrer que $R_2(D') = C$
   d) Donner la nature du quadrilatère ABCD

4) M est un point variable sur $\mathcal{C}\setminus\{A,D,D'\}$, la droite (MD') recoupe($\mathcal{C}$ ') en M'
   a) Montrer que DMM'est un triangle équilatéral de sens direct
   b) la parallèle à (DM) passant par C recoupe le cercle de diamètre [BI] en M''
      Montrer que: $R_2((MD')) = (C\,M'')$ puis $R_2(M)$ =M''
   c) En déduire qu'il existe un seul antidéplacement f tel que: f(M) = O et f(D) = M''

5) (Δ) Etant la droite passant par M' et perpendiculaire à (MD)
   a) Montrer que f = $R_2 o S_\Delta$ puis déterminer f(O)
   b) En déduire que f est une symétrie glissante
   c) Déterminer le vecteur de f et montrer que l'axe de f passe par un point fixe que l'on déterminera lorsque M varie sur $\mathcal{C}\setminus\{A,D,D'\}$

Exercice 4 (6 points)

I k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1

Soit f_k la fonction définie sur ℝ par : $f_k(x) = x + e^{-kx}$

On désigne par C_k sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = +\infty$
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) - x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_k(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2) Dresser le tableau de variation de f_k et vérifier que f_k admet un minimum $y_k = \frac{1+\ln k}{k}$
3) Etudier les positions relatives de C_k et C_{k+1}
4) Dans l'annexe ci jointe (figure2), on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$,la courbe C_1 et la courbe $\Gamma: y = \frac{\ln x}{x}$
   a) Construire, sur le même graphique, le point de C_2 où la tangente est horizontale, puis tracerC_2.
   b) Soit un réel $\alpha > 0$, A_α est l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limité par C_1 , C_2 et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$. Déterminer α pour que $A_\alpha = \frac{1}{8}$

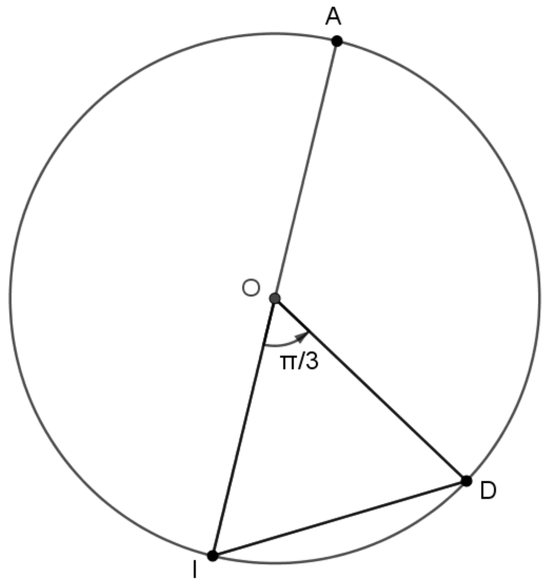
II On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_{n+1} = f_1(U_n) = U_n + e^{-U_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$
   b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n on a : $\ln(n+1) \leq \ln n + \frac{1}{n}$
2) a) Montrer, que pour tout entier naturel n non nul, $f_1(\ln n) = \ln n + \frac{1}{n}$
   b) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel non nul, $\ln n \leq U_n$
   c) Déterminer alors la limite de la suite (U_n) .

Feuille à remettre

Nom et Prénom :…………………………… **Classe :………**

Exercice3



Exercice4