L. P. Kairouan	**Devoir de synthèse N°2**	**Prof: Chouihi**
Le : 03 – 03 – 19	**Durée : 4heures**	**Classe: 4M₂**

Exercice N°1 (4 points)

Un responsable d'un magasin achète des MP_5 auprès de deux fournisseurs F_1et F_2 dont 25% du fournisseur F_1

La proportion des MP_5 du deuxième choix est de 2 % chez le fournisseur F_1 et de 4 % chez le second.

On considère les événements : D : « Le MP_5 est du deuxième choix »

F_1 : « le MP_5 provient du fournisseur F_1 » F_2 : « le MP_5 provient du fournisseur F_2 »

1) a) Donner un arbre pondéré.

b) Calculer P $(D \cap F_1)$ puis démontrer que P (D) = 0,035.

c) Un MP_5 est du deuxième choix. Quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur?

2) Le responsable commande 20 MP_5, quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient du deuxième choix.

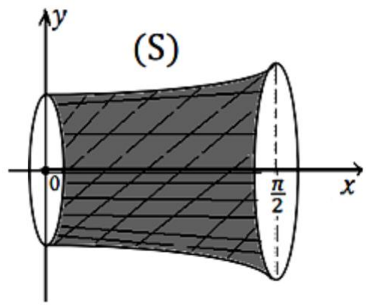
3) Le responsable achète le MP_5 du premier fournisseur à 80 dinars et du second à 72^D et il vend le MP_5 à 125^D s'il est du premier choix et à 15^D si non.

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque MP_5 vendu associe le gain algébrique en dinars réalisé par le responsable.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X. Donner une interprétation de ce résultat.

Exercice N°2 (4 points)



Dans la figure ci-contre le solide (S) est obtenu par la rotation de la courbe de la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par :

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+\cos x}}$ autour de l'axe des abscisses.

On note V le volume de (S) en unités de volume.

1/ Pour tout $x \in [0,\pi[$ on pose :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2+\cos t}\,dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{2}{3+t^2}\,dt$$

a) Montrer que $V = \pi F(\frac{\pi}{2})$

b) Montrer que G est dérivable sur $[0,\pi[$ et calculer $G'(x)$.

c) En déduire que pour tout $x \in [0,\pi[$ on a : $F(x) = G(x)$.

2/ On pose $H(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$

a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ puis pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$, $H(\tan x) = x$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0,\pi[$, $G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} H(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right))$

c) Etablir que $H(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$ et en déduire la valeur de V.

3/ On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x.\sin x}{(2+\cos x)^2}\,dx$

En intégrant par parties, montrer que $I = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

Exercice N°3 (6 points)

Dans la première figure de la feuille jointe, ABC est un triangle direct tel que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

Les points I , J et K sont les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement des sommets A, B et C.
Le point E est le milieu du segment [AC].

1) Montrer que le triangle AIE est équilatéral direct.

2) Soit S la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

On note Δ est la médiatrice du segment [IE] et on pose $f = S o S_{\Delta}$.

a) Montrer que S(I) = B. En déduire que f (E) = B.

b) Montrer que f est une similitude indirecte de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

c) Caractériser fof. En déduire que f(B) = C.

d) Montrer que l'image par f de la droite (BJ) est la droite (CK). En déduire que f (J) = K.

3) Soit g la similitude indirecte telle que g(C) = A et g(K) = I.

a) En remarquant que le triangle BCK est rectangle, isocèle et direct, montrer que le point B est le centre de g.

b) On pose D = g(A). Montrer que le point D appartient à la droite (Bl).

c) Justifier que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$. Construire alors le point D.

4) On pose $\varphi = gof$.

a) Montrer que φ est une similitude directe. Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$.

b) Montrer qu'une mesure de l'angle de φ est $\frac{7\pi}{6}$ . .

5) Soit Ω le centre de φ.

a) Vérifier que $D = \varphi o \varphi o \varphi(E)$. En déduire que : $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

b) On pose $F = \varphi o \varphi o \varphi$ (J). Montrer les droites (FD) et (JE) sont perpendiculaires.

c) Vérifier que $F = \varphi o \varphi$ (I). En remarquant que : IB = IE, montrer que FD = FA.

d) Construire le point F. En déduire une construction du point Ω.

Exercice N°4 (6 points)

1) Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln x + x$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Montrer que pour tout x > 0, $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

2) Dans la deuxième figure de la feuille jointe, C_g et C_h sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des fonctions g et h définies sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = \ln x$.

C_g et C_h se coupent en un point d'abscisse β .

a) Par une lecture graphique donner le signe de f '(x).

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Montrer que $f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$.

3) On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a) Etudier la position relative des courbes, C_f et C_h

b) Montrer que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0,4 < x_1 < 0,5$ et $3,8 < x_2 < 3,9$.

c) Placer dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ les points A (β , 0) et B(0, $\frac{1}{\beta}$) et en déduire une construction du point de coordonnées (β , $f(\beta)$).

d) Tracer C_f.

4) Pour tout réel t de $\left]0,+\infty\right[\setminus \{\beta\}$ on désigne par A(t) l'aire de la partie du plan S(t) limitée par les courbes C_g et C_h et la droite d'équation x = t.

a) Montrer que pour tout réel $t \in \left]0,+\infty\right[\setminus \{\beta\}$; $A(t) = f(\beta) - f(t)$.

b) Soit $t_0 > \beta$. Hachurer $S(t_0)$.

c) Montrer qu'il existe un réel unique t_1 dans $]0, \beta[$ tel que $A(t_1) = A(t_0)$
Hachurer $S(t_1)$.

Feuille à remettre

Nom et Prénom :…………………………… **Classe :………**