L. P. Kairouan	**Devoir de synthèse N°2**	**Prof: Chouihi**
Le : 05 – 03 – 19	**Durée : 4heures**	**Classe: 4M1**

Exercice N°1 (3 points)

NB: Les questions 1) , 2) , 3) et 4) sont indépendantes

1) Soit F la fonction définie sur IR_+ par : $F(x) = \int_1^{e^x} \frac{\ln t}{t^2} dt$.
   a) Montrer que F est dérivable sur IR_+ et Calculer F'(x).
   b) En déduire que pour tout $x \in IR_+$, $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$.
2) Soit G la fonction définie sur IR par : $G(x) = \int_0^x \frac{t^3}{1+t^2} dt$.
   a) Etudier la parité de G.
   b) En utilisant la méthode des rectangles, donner un encadrement de G(1). (prendre n = 5)
3) Déterminer le chiffre des unités de 7^{2019}.
4) Déterminer la somme des chiffres de $10^{2019} - 2019$.

Exercice N°2 (4 points)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \ln(4x + \sqrt{16x^2+1})$.

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$) .

1) a. Montrer que f est définie sur IR.
   b. Vérifier que f est impaire.
2) a. Etudier les variations de f.
   b. Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) .
3) a. Montrer que f est bijective et tracer, dans le même repère, la courbe ($\mathscr{C}$') de sa fonction réciproque f^{-1}.
   b. Montrer que pour tout $x \in IR$, $f^{-1}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{8}$
4) a. Montrer que l'équation : f(x) = x , admet dans IR_+ , deux solutions. On désignera par α la solution non nulle.
   b. Calculer, en fonction de α, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ limité par les deux courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$') .

Exercice N°3 (4,5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I. 1/ Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$ et tracer la courbe C_f.

2/ a) Calculer $A(\alpha)=\int_\alpha^1 f(x)dx$ où $0<\alpha<1$. Interpréter graphiquement cette valeur.

b) Calculer $\lim_{\alpha\to 0^+} A(\alpha)$.

II. 1/ a) Justifier que pour tout $n \in IN^*$, on a : $\frac{1}{n+1} \le \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \le \frac{1}{n}$.

b) Vérifier que $\int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx = \frac{1}{n} - f(n)$.

c) En déduire que pour tout $n \in IN^*$; $0 \le f(n) \le \frac{1}{n(n+1)}$.

2/ On considère la suite (S_n) définie sur IN^* par : $S_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+......+\frac{1}{2n(2n+1)}$

a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$; $0 \le \sum_{k=n}^{2n} f(k) \le S_n$

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in IR \setminus \{-1,0\}$, on a : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$

c) En déduire que $S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$.

d) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k)$

3/ On considère la suite (U_n) définie sur IN^* par $U_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$.

Vérifier que pour tout $n \in IN^*$; $\sum_{k=n}^{2n} f(k) = U_n - \ln(2 + \frac{1}{n})$ puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} U_n$

Exercice N°4 (4,5 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O et de sens direct.

1) Soit f la similitude directe qui envoie D en A et O en B.

a) Déterminer le rapport et l'angle de f.

b) Préciser l'image par f de la droite (OD).

c) Déterminer les images par f des droites (OC) et (CD) et en déduire que C est le centre de f.

2) On désigne par J le symétrique de O par rapport à (AD) et par R la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On pose g = $t_{\overrightarrow{BA}}$ o f o R.

a) Préciser g(J) et g(A).

b) Montrer que g est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

3) Soit Ω le centre de g.

a) Montrer que les points Ω, A, D et B sont cocycliques.

b) Caractériser gog et en déduire que Ω appartient au cercle de diamètre [JD].

c) Trouver une construction géométrique de Ω.

4) On désigne par I le symétrique de C par rapport à la droite (AD) et par K le symétrique de D par rapport à J.

Soit σ la similitude indirecte définie par : $\sigma = g \circ S_{(AI)}$.

a) Vérifier que J est le milieu du segment [AI].

b) Déterminer $\sigma o \sigma(J)$ et en déduire que K est le centre de σ.

c) Déterminer l'axe Δ de σ.

Exercice N°5 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{(8+6i)}{5}\bar{z} + \frac{(-6+13i)}{5}$.

1) a) Montrer que f est une similitude indirecte dont on déterminera le rapport et le centre.

b) Montrer que f a pour axe la droite Δ d'équation : $x - 3y + 3 = 0$

2) Déterminer l'ensemble D des points M(z) tels que z' soit imaginaire.

3) a) Résoudre dans Z^2 l'équation (E) : $4x + 3y = 3$.

b) En déduire les points de D dont les coordonnées sont des entiers et dont l'abscisse x vérifie $|x| \le 2$.

c) Soit (x,y) une solution de (E), quelles sont les valeurs possibles de $x \wedge y$.

d) Déterminer les solutions (x,y) de (E) tels que : $x \wedge y = 3$ et $x \vee y = 189$

4) On considère les points M d'affixes $z = x + 2i$, où $x \in Z$.

Déterminer les entiers x tels que Re(z') et Im(z') soient entiers.