L.P. Kairouan	**Devoir de synthèse N°2**	**Prof : Chouihi**
Le : 10 / 05 / 18	**Durée : 4heures**	**Classe : 4M2**

Exercice N°1 **(3points)**

1) On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

   a) Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = x\,e^{-x}$ est une solution de (E).

   b) Montrer que

   y est solution de (E) si et seulement si (y – f) est solution de l'équation différentielle (E_0): $y' + y = 0$.

   c) Résoudre l'équation (E_0) et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

2) On désigne par (E') l'équation différentielle $y'' + y' = e^{-x}$

   a) On pose $z = y'$. Vérifier que z est solution de (E).

   b) Expliciter $\int_0^x te^{-t}dt$ avec x un réel.

   c) En déduire la résolution de (E')

Exercice N°2 **(3,5 points)**

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points A(0,1,1), B(1, 3, 3) et C(-3,- 2, 1) .

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et en déduire une mesure en radian de $B\hat{A}C$.

   b) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et en déduire une équation du plan P =(ABC).

   c) Calculer le volume du tétraèdre OABC.

2) Soit t l'application de ξ dans ξ qui à tout point M associe le point M' tel que

   $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{OM}$

   a) Montrer que t est une translation de vecteur $\vec{u} = -\vec{j} + \vec{k}$.

   b) Donner les expressions analytiques de t et en déduire les coordonnées de A'= t(A).

3) Soit S l'ensemble des points M(x,y,z) de ξ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 7 = 0$.

   a) Montrer que S est une sphère dont-on précisera le centre I et le rayon R.

   b) Montrer que S' = t< S > coupe le plan P suivant un cercle $\mathscr{C}$ dont-on précisera le centre H et le rayon r.

Exercice N°3 **(3,5 points)**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit ($\mathcal{E}$) la conique d'équation : $4x^2 + 3y^2 - 4y - 4 = 0$

1) a) Montrer que ($\mathcal{E}$) est une ellipse dont on déterminera l'excentricité, les sommets, un foyer et la directrice associée.
   b) Tracer ($\mathcal{E}$).

2) Soit M un point de ($\mathcal{E}$) d'affixe z = x + iy, x et y des réels.

   a) Montrer que $|z| = \frac{1}{2}\,y + 2$

   b) En déduire que $|z| = \frac{2}{2 - \sin\theta}$ où θ est un argument de z.

   c) La perpendiculaire à (OM) passant par O coupe ($\mathcal{E}$) en un point N tel que $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

   Déterminer $\theta \in [0\ ,2\pi]$ pour que l'aire du triangle OMN soit maximale.

Exercice N°4 **(5 points)**

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O et de sens direct. On désigne par I le milieu du segment [AB] et par Δ la droite qui porte la bissectrice intérieure de $B\hat{A}C$

1) Soit f la similitude directe qui envoie I en O et B en C.
   a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de f
   b) Montrer que le point A est le centre de f. En déduire la forme réduite de f.

2) Soit R la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{4}$
   a) Vérifier que $R = S_{(AC)} \circ S_{\Delta}$.
   b) Soit $\sigma = f \circ S_{\Delta}$. Prouver que σ est une similitude indirecte et déterminer sa forme réduite.

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, C, E et F d'affixes respectifs $-1 + i$; $i\sqrt{2}$; $2 - 4i$ et $3 + 2i$.
   a) Soit g l'application qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que : $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z} - 1 + i(1+\sqrt{2})$.

   Montrer que g est la symétrie orthogonale d'axe (AC).
   b) Montrer que la forme complexe de σ est $z' = (1+i)\,\bar{z} - 1 + 3i$.

4) a) Déterminer l'affixe du point G = σ(E), puis vérifier que $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont orthogonaux.
   b) On considère un point M d'affixe z = x + iy , où $(x, y) \in \mathrm{IR}^2$.
   Montrer que $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AM'}$ avec M' = σ (M) sont orthogonaux si et seulement si $5x + 3y = -2$.
   c) Résoudre dans ZxZ l'équation : $5x + 3y = -2$.
   d) En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle [-6, 6] tels que $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont orthogonaux.

Exercice N°5 **(5 points)**

On considère la fonction g définie sur IR \{0} par : $g(t) = \frac{1}{t}e^{-t^2}$

On considère la fonction F définie sur IR par : $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} g(t)dt, \text{ si } x \neq 0 \\ F(0) = \ln(2) \end{cases}$

1) Pour $a > 0$, interpréter $F(a)$ et $F(-a)$ en terme d'aires. En déduire que F est paire.

2) a) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $F'(x) = \frac{e^{-4x^2}}{x}(1 - e^{3x^2})$

b) En déduire le sens de variation de F sur $]0, +\infty[$.

3) a) Montrer que pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x$.

b) En déduire que, $\forall\, t > 0$, $\frac{1}{t} - t \leq g(t) \leq \frac{1}{t}$.

c) Prouver que, $\forall x > 0$, $\ln(2) - \frac{3x^2}{2} \leq F(x) \leq \ln(2)$

d) Démontrer que F est continue et dérivable en zéro.

4) a) Montrer que, pour tout réel $t \geq 1$; $e^{-t^2} \leq e^{-t}$

b) En déduire que $\forall x \geq 1$, $F(x) \leq \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$

c) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

5) a) Dresser le tableau de variations de la fonction F sur IR.

b) Tracer l'allure de la représentation graphique de F dans un repère orthonormé, unité graphique 4 cm.
(On donne $F(0,5) \simeq 0,4$ et $F(1) \simeq 0,1$)