L.P.Ibn Khaldoun Kairouan	**Devoir de contrôle N°2**	**Prof : Chouihi**
Le : 25 / 02 /2023	**Durée : 4heures**	**Classe : 4M**

Exercice N°1 (4 points)

Pour tout entier naturel non nul n on pose $I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$

1/ En intégrant par parties, calculer I_1.

2/ a/ Montrer que la suite (I_n) est décroissante et à termes positifs. Que peut-on conclure ?

b/ Montrer que pour tout $x\in[1,e]$, $\ln x \leq \frac{x}{e}$.

c/ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3/ a/ Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$

b/ Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $\frac{e^3}{n+4} \leq I_n \leq \frac{e^3}{n+3}$

c/ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

Exercice N°2 (5 points)

A. Soit f la fonction définie sur [-1,1] par $f(x) = (1- x)\sqrt{1-x^2}$ et (C) sa courbe dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 2 cm).

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite en (-1) et à gauche en 1. Interpréter graphiquement.

2/ Etudier les variations de f et tracer (C) .

B. On pose $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ et pour tout $n\in IN^*$, $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$

1/ Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $g(x) = \int_0^{\cos x} \sqrt{1-t^2}dt$

a/ Montrer que g est dérivable sur $[0,\pi]$ et calculer g'(x), en déduire que $g(x) = \frac{1}{4}(\pi - 2x + \sin 2x)$

Déduire alors la valeur de I_0

b/ Calculer I_1.

En déduire l'aire de la région limitée par (C), l'axes des abscisses et les droites d'équations : x = 0 et x = 1.

2/ a/ Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $I_n > 0$

b/ Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in IN^*}$ et en déduire qu'elle converge.

c/ Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

3/ a/ A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier $n \geq 2$: $(n+2)I_n = (n-1)I_{n-2}$

b/ En déduire que pour tout $p\in IN^*$, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+2}p!(p+1)!}\pi$

Exercice N°3 (5 points)

NB : Les questions 1/ ; 2/ ; 3/ et 4/ de cet exercice sont indépendantes !

1/ a/ Résoudre dans Z l'équation : $2x \equiv 1 \pmod 7$

b/ En déduire la résolution dans Z², l'équation : $23x - 7y = 1$

2/ Pour tout entier naturel n on pose $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 4$

a/ Soit $n \in IN$, déterminer, suivant les valeurs de n, les restes de la division euclidienne de 2^n , 3^n et 4^n par 5.

b/ En déduire les restes modulo 5 de A_n.

c/ Montrer que pour tout entier naturel n, A_n n'est pas un carré parfait.

3/ On se propose de déterminer les entiers naturels n et k tel que : $n\,! + 8 = 2^k$ (E)

a/ Vérifier que $k > 3$.

b/ On suppose que $n > 5$. Vérifier que $n\,! \equiv 0 \pmod{16}$ et en déduire que l'équation (E) n'a pas de solution

c/ Déterminer alors les couples (n,k) solutions de (E).

4/ On se propose de résoudre dans Z l'équation (F): $x^5 \equiv 11 \pmod{17}$

a/ Montrer que si x est solution de (F) alors $x \wedge 17 = 1$

b/ Montrer que $x^{16} \equiv 1 \pmod{17}$

c/ Résoudre alors l'équation (F)

Exercice N°4 (6 points)

Dans la figure de la feuille jointe, ABC est un triangle direct tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

Les points I , J et K sont les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement des sommets A, B et C.

Le point E est le milieu du segment [AC].

1) Montrer que le triangle AIE est équilatéral direct.

2) Soit S la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

On note Δ est la médiatrice du segment [IE] et on pose $f = S \circ S_\Delta$.

a) Montrer que S(I) = B. En déduire que f (E) = B.

b) Montrer que f est une similitude indirecte de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

c) Caractériser fof. En déduire que f(B) = C.

d) Montrer que l'image par f de la droite (BJ) est la droite (CK). En déduire que f (J) = K.

3) Soit g la similitude indirecte telle que g(C) = A et g(K) = I.

a) En remarquant que le triangle BCK est rectangle, isocèle et direct, montrer que le point B est le centre de g.

b) On pose D = g(A). Montrer que le point D appartient à la droite (BI).

c) Justifier que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$. Construire alors le point D.

4) On pose $\varphi = g \circ f$.

a) Montrer que φ est une similitude directe. Déterminer φ(A) et φ(B).

b) Montrer qu'une mesure de l'angle de φ est $\frac{7\pi}{6}$ . .

5) Soit Ω le centre de φ.

a) Vérifier que $D = \varphi\circ\varphi\circ\varphi(E)$. En déduire que : $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

b) On pose $F = \varphi\circ\varphi\circ\varphi$ (J). Montrer les droites (FD) et (JE) sont perpendiculaires.

c) Vérifier que $F = \varphi\circ\varphi$ (I). En remarquant que : IB = IE, montrer que FD = FA.

d) Construire le point F. En déduire une construction du point Ω.