L.P.Ibn Khaldoun Kairouan	**Devoir de contrôle N°2**	**Prof : Chouihi**
Le : 17 / 02 /2021	**Durée : 4heures**	**Classe : 4M**

Exercice N°1 (5 points)

NB : Les questions 1/ ; 2/ ; 3/ et 4/ de cet exercice sont indépendantes !

1/ On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $2^x + y^2 = 3$

a/ Déterminer, suivant les valeurs de l'entier y, les restes modulo 4 de y^2 .

b/ En déduire que pour $x \geq 2$, l'équation (E) n'a pas de solution.

c/ Achever la résolution de l'équation (E).

2/ Résoudre dans Z: $\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{10} \\ x \equiv 5 \pmod{13} \end{cases}$

3/ Résoudre dans Z l'équation: $35x \equiv 9 \pmod{42}$

4/ a/ Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes modulo 13 de 5^n.

b/ Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes modulo 13 de 4^n.

c/ En déduire l'ensemble des entiers naturels n pour les quels $4^n + 5^n$ est divisible par 13.

Exercice N°2 (6 points)

Dans un plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en B et tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par O le milieu de [AC], I le milieu de [OA] et J le milieu de [AB].

1/ Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que R(A) = O et R(B) = C .

2/ (a) Montrer que R est une rotation dont-on déterminera son angle. Construire son centre D .

(b) Montrer que le quadrilatère ABOD est un losange.

3/ On pose f = $\mathrm{Rot}_{\overrightarrow{BA}}$

(a) Déterminer f(B) .

(b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

4/ Soient M , M' et M" les points du plan tels que R(M') = M et f(M) = M" .

(a) Montrer que si M est distinct de A et D , alors : $\left(\widehat{\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MM''}}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3} + \left(\widehat{\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MA}}\right)[2\pi]$

(b) On suppose que MM'M" est un triangle rectangle en M de sens direct.
Montrer que M varie sur un cercle à préciser .

5/ Soit φ l'antidéplacement qui transforme B en A et A en O .

(a) Montrer que φ est une symétrie glissante puis déterminer ses éléments caractéristiques .

(b) Montrer que φ (O) = D .

(c) Soit E = φ (D) . Montrer que E et B sont symétriques par rapport à O.

Exercice N°3 (5 points)

On considère la suite $(I_n)_{n\in IN}$ par : $I_0 = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ et pour tout n∈IN* , $I_n = \frac{1}{2^n}\int_0^2 x^n\sqrt{4-x^2}\,dx$.

1/ a/ A l'aide d'une interprétation géométrique montrer que $I_0 = \pi$

b/ Calculer I_1.

c/ Montrer que pour tout n∈IN*, on a : $0 < I_n \leq \frac{4}{n+1}$. En déduire limI.

2/ a/ Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n∈IN, $I_{n+2} = (\frac{n+1}{n+4})I_n$

b/ Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c/ En déduire que pour tout n∈IN, on a : $\frac{n+1}{n+4} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$

3/ On considère la suite $(U_n)_{n\in IN}$ définie par : $U_n = \frac{4^{2n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$

a/ Montrer par récurrence que pour tout n∈IN, $I_{2n+1} = \frac{4^{n+1}(n!)^2}{(2n+3)(2n+1)!}$ et $I_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{(n+1)4^n(n!)^2}$

b/ En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{\pi}{2}$

Exercice N°4 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $[-1, \frac{1}{2}]$ par : $\begin{cases} f(x) = x - 1 + \sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in [-1, 0[\\ f(x) = \sqrt{\sin(\pi x)} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

c) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1.Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) En déduire que f réalise une bijection de $[-1, \frac{1}{2}]$ sur [-2,1].

3) a) Calculer $f^{-1}(0)$; $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

b) Pour tout $x \in [-2,0[$, calculer $f^{-1}(x)$.

4) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ et que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $(f^{-1})'(x) = \frac{2x}{\pi\sqrt{1-x^4}}$.

5) On pose $\varphi(x) = f^{-1}(\sqrt{\sin(\pi x)}) + f^{-1}(\sqrt{\cos(\pi x)})$; $x \in [0, \frac{1}{2}]$,

Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $\varphi(x) = \frac{1}{2}$.