L.P. Kairouan	**Devoir de contrôle N°2**	**Prof : Chouihi**
Le : 13 / 03 /2021	**Durée : 4heures**	**Classe : $4M_1$**

Exercice N°1 **(5 points)**

NB : Les questions 1/ ; 2/ ; 3/ et 4/ de cet exercice sont indépendantes !

1/ a/ Résoudre dans Z l'équation : $2x \equiv 1 \pmod 7$

b/ En déduire la résolution dans Z^2, l'équation : $23x - 7y = 1$

2/ Pour tout entier naturel n on pose $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 4$

a/ Soit $n \in IN$, déterminer, suivant les valeurs de n, les restes de la division euclidienne de 2^n , 3^n et 4^n par 5.

b/ En déduire les restes modulo 5 de A_n.

c/ Montrer que pour tout entier naturel n, A_n n'est pas un carré parfait.

3/ On se propose de déterminer les entiers naturels n et k tel que : $n\,! + 8 = 2^k$ (E)

a/ Vérifier que $k > 3$.

b/ On suppose que $n > 5$. Vérifier que $n\,! \equiv 0 \pmod{16}$ et en déduire que l'équation (E) n'a pas de solution

c/ Déterminer alors les couples (n,k) solutions de (E).

4/ On se propose de résoudre dans Z l'équation (F): $x^5 \equiv 11 \pmod{17}$

a/ Montrer que si x est solution de (F) alors $x \wedge 17 = 1$

b/ Montrer que $x^{16} \equiv 1 \pmod{17}$

c/ Résoudre alors l'équation (F)

Exercice N°2 **(6 points)**

Dans le plan orienté, on considère un carré de centre I et de sens direct. On désigne par J et K les milieux respectifs des côtés [AD] et [CD], soit E le point du plan tel que DBE soit un triangle équilatéral de sens direct.

« Faire une figure claire, prendre AB = 3cm »

1/ On pose : $\psi = t_{\overrightarrow{BC}} o S_{(AC)}$

a) Déterminer $\psi(A)$ et $\psi(D)$.

b) En déduire que ψ est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

2/ a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoi B sur A et A sur D.

b) Caractériser R.

3/ On pose $g = R_{(B,\frac{\pi}{6})} o R_{(E,\frac{\pi}{3})}$, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

4/ Soit $r = R_{(I,\frac{\pi}{2})}$ et on pose $t = g \text{ o } r^{-1}$. Déterminer t(A) puis caractériser t.

5/ Pour tout M du plan P, on pose $M_1 = r(M)$ et $M_2 = g(M)$.

a) Quelle est la nature du quadrilatère ABM_2M_1 (On admet que les points A, B et M_1 ne sont pas alignés)

b) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement φ qui transforme A en M_1 et D en M_2.

c) Comparer φ et $t_{\overrightarrow{AM_1}} o S_{(AI)}$.

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de φ dans chacun des cas suivants :

c_1)) $M \in$ (BD) c_2)) $M \in$ la parallèle à (AC) passant par D.

6/ Soit Δ une droite variable passant par A distincte de (AC), on désigne par B' et D' les projetés orthogonaux respectifs des points B et D sur la droite Δ.

a) Soit Δ' la droite perpendiculaire à Δ passant par D. Déterminer les images par r des droites Δ 'et Δ.

b) En déduire l'image de D' par r.

c) Montrer que le cercle de diamètre [B'D'] passe par un point fixe lorsque Δ varie.

Exercice N°3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : f(x)= $\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I/ 1/ Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$ et tracer la courbe C_f.

2/ a) Calculer $A(\alpha)=\int_\alpha^1 f(x)dx$ où $0<\alpha<1$. Interpréter graphiquement cette valeur

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} A(\alpha)$.

II/ 1/ a) Justifier que pour tout $n\in IN^*$, on a : $\frac{1}{n+1}\le\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{n}$.

b) Vérifier que $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{n}-f(n)$. c) En déduire que pour tout $n\in IN^*$; $0\le f(n)\le\frac{1}{n(n+1)}$.

2/ On considère la suite (S_n) définie sur IN^* par $S_n=\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+.........+\frac{1}{2n(2n+1)}$

a) Montrer que pour tout $n\in IN^*$; $0\le\sum\limits_{k=n}^{2n}f(k)\le S_n$

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x\in IR\setminus\{0,-1\}$, on a : $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$

c) En déduire que $S_n=\frac{n+1}{n(2n+1)}$. d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n}f(k)$

3) On considère la suite (U_n) définie sur IN^* par $U_n=\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+............+\frac{1}{2n}$.

Vérifier que pour tout $n\in IN^*$; $\sum\limits_{k=n}^{2n}f(k)=U_n-\ln(2+\frac{1}{n})$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

Exercice N°4 (4 points)

A. Soit f la fonction définie sur [-1,1] par f(x) = (1- x) $\sqrt{1-x^2}$ et (C) sa courbe dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 2 cm).

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite en (-1) et à gauche en 1. Interpréter graphiquement.

2/ Etudier les variations de f et tracer (C) .

B. On pose $I_0=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ et pour tout n∈IN*, $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$

1/ Soit g la fonction définie sur [0, π] par : g(x) = $\int_0^{\cos x}\sqrt{1-t^2}dt$

a/ Montrer que g est dérivable sur [0,π] et calculer g'(x), en déduire que g(x) = $\frac{1}{4}(\pi-2x+\sin 2x)$

Déduire alors la valeur de I_0

b/ Calculer I_1.

En déduire l'aire de la région limitée par (C), l'axes des abscisses et les droites d'équations : x = 0 et x = 1.

2/ a/ Montrer que pour tout n∈IN*, $I_n>0$

b/ Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in IN^*}$ et en déduire qu'elle converge.

c/ Montrer que pour tout n∈IN*, $I_n\le\frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$

3/ a/ A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier $n\ge 2$:

$(n+2)I_n=(n-1)I_{n-2}$

b/ En déduire que pour tout p∈IN*, $I_{2p}=\frac{(2p)!}{2^{2p+2}p!(p+1)!}\pi$