L.P. Kairouan **Le : 17 / 02 /2020**	**Devoir de contrôle N°2** **Durée : 2heures**	**Prof : Chouihi** **Classe : 4M2**

Exercice N°1 **(8 points)**

<u>NB :</u> Les questions 1) , 2) et 3) sont indépendantes !

1) On considère la fonction F définie sur IR par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

a) Déterminer, en justifiant, la parité de F.

b) A l'aide de la méthode des rectangles, donner un encadrement de F(1). (prendre n = 5)

2) On considère la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $G(x)=\int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

a) Montrer que G est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et calculer G'(x).

b) En déduire que pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ on a: G(x) = x.

3) Pour tout $n\in IN^*$, On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n\,dx$.

a) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $I_n > 0$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) En intégrant par parties, montrer la relation : $(n + 2)I_{n+2} =(n + 1)I_n$

d) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $\frac{n+1}{n+2} \le \frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$

e) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\times\frac{\pi}{2}$

Exercice N°2 **(6 points)**

1/ On pose $A = 7^{2041} - 3\times 2^{2041}$

a) Vérifier que $7^4 \equiv 1 \pmod{32}$. Déterminer alors, suivant les valeurs de l'entier naturel k le reste modulo 32 de 7^k.

b) En déduire le reste modulo 32 de A.

c) Montrer que : $A \equiv 1 \pmod{31}$

2/ Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : 32x – 31y = 6.

3/ a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} n \equiv 7 \pmod{32} \\ n \equiv 1 \pmod{31} \end{cases}$

b) Déterminer le reste de A modulo 992.

Exercice N°3 **(6 points)**

Dans le plan orienté, on donne le triangle ABC tel que : AB = 2, $AC = 1+\sqrt{5}$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

1) Soit S la similitude directe qui transforme B en A et A en C. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.

2) On appelle Ω le centre de S. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre [AB] et à la droite (BC). Construire le point Ω.

3) On note D l'image du point C par la similitude S.

a) Démontrer que les points A, Ω et D sont alignés ainsi que les droites (CD) et (AB) sont parallèles. Construire le point D.

b) Montrer que $CD = 3+\sqrt{5}$.