L.P. Kairouan	**Devoir de contrôle N°2**	**Prof : Chouihi**
Le : 12 / 02 /2019	**Durée : 4heures**	**Classe : 4M$_1$**

Exercice N°1 (5points)

N.B: Les questions 1) , 2) , 3) , 4) et 5) de cet exercice sont indépendantes !

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer l'inverse de 103 modulo 47 et l'inverse de 47 modulo 103.
2) Montrer que pour tout entier naturel n, 4n + 2 n'est pas un carré parfait.
3) Soit n un entier naturel. En utilisant les restes de la division euclidienne par 9, montrer qu'il n'existe aucun entier naturel p tel que $3n^2 + 3n + 7 = p^3$.
4) On pose $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}dx$
   a) Interpréter géométriquement I, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   b) En déduire la valeur de I.
5) Calculer $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^5 dx$

Exercice N°2 (4 points)

1) Etudier, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.

2) Pour tout entier naturel n on pose $S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n$
   a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $4S_n = 5^{n+1} - 1$
   b) Soit a un entier, montrer que $4S_n \equiv a \pmod 7$ si et seulement si $S_n \equiv 2a \pmod 7$
   c) Déterminer tous les entiers naturels n tels que S_n soit divisible par 7.

3) Soit n un entier naturel non nul donné.
   On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E): $5^n x + S_n y = 1$
   a) Déterminer une solution particulière de l'équation (E).
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

Exercice N°3 (5 points)

A. On considère dans le plan orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, le cercle Γ de centre O et de rayon 1. Soit A(1,0) et A'(-1,0).

1) Par tout point H du segment [AA'], distinct de A et A', on mène la perpendiculaire Δ à (AA').
   Δ coupe Γ en M et M'.
   On pose H(x,0) , Montrer que l'aire du triangle AMM' est égale à : $(1 - x)\sqrt{1-x^2}$.

2) Soit f la fonction définie sur [-1,1] par $f(x) = (1- x)\sqrt{1-x^2}$ et (C) sa courbe dans $(O,\vec{i},\vec{j})$
   a) Etudier la dérivabilité de f à droite en (-1) et à gauche en 1.
   b) Etudier les variations de f et tracer (C). (Prendre 2cm pour unité).
   c) Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle AMM' est maximale.

B. On pose $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ et pour tout $n \in IN^*$, $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}dx$

1) Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $g(x) = \int_0^{\cos x} \sqrt{1-t^2}dt$.

a) Montrer que g est dérivable sur $[0,\pi]$ et calculer $g'(x)$.

b) En déduire que $g(x) = \frac{1}{4}(\pi - 2x + \sin 2x)$. Prouver alors que $I_0 = \frac{\pi}{4}$.

c) Calculer I_1, en déduire l'aire de la région limitée par (C), l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

2) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $I_n \geq 0$

b) Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in IN^*}$ et on déduire qu'elle converge.

c) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

3) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier $n \geq 2$; $(n+2)I_n = (n-1)I_{n-2}$

b) En déduire que pour tout $p \in IN^*$, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+2} p!(p+1)!}\pi$

Exercice N°4 **(6 points)**

Dans la figure de l'annexe jointe, ABC est un triangle direct tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

Les points I , J et K sont les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement des sommets A, B et C.

Le point E est le milieu du segment [AC].

1) Montrer que le triangle AIE est équilatéral direct.

2) Soit S la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{-\pi}{4}$.

On note Δ la médiatrice du segment [IE] et on pose $f = SoS_\Delta$.

a) Montrer que S(I) = B. En déduire que f (E) = B.

b) Montrer que f est une similitude indirecte de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

c) Caractériser fof. En déduire que f(B) = C.

d) Montrer que l'image par f de la droite (BJ) est la droite (CK). En déduire que f (J) = K.

3) Soit g la similitude indirecte telle que g(C) = A et g(K) = I.

a) En remarquant que le triangle BCK est rectangle, isocèle et direct, montrer que le point B est le centre de g.

b) On pose D = g(A). Montrer que le point D appartient à la droite (Bl).

c) Justifier que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$. Construire alors le point D.

4) On pose $\varphi = gof$.

a) Montrer que φ est une similitude directe. Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$.

b) Montrer qu'une mesure de l'angle de φ est $\frac{7\pi}{6}$. .

5) Soit Ω le centre de φ.

a) Vérifier que $D = \varphi o \varphi o \varphi(E)$. En déduire que $(\widehat{\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D}}) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$.

b) On pose $F = \varphi o \varphi o \varphi (J)$. Montrer les droites (FD) et (JE) sont perpendiculaires.

Vérifier que $F = \varphi o \varphi (I)$. En remarquant que IB = IE, montrer que FD = FA.

c) Construire le point F. En déduire une construction du point Ω.