L.P. Kairouan	**Devoir de contrôle N°2**	**Prof : Chouihi**
Le : 16 / 12 / 17	**Durée : 3heures**	**Classe : 4M$_2$**

Exercice N°1 (4points)

NB : Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes !

1) Soit f une fonction définie, continue sur [1,3], dérivable sur]1,3[et tel que pour tout $x \in [1,3]$ $f(x) \neq 0$.
   On donne f(1) = 1 et f(3) = 2.
   Montrer qu'il existe au moins $c \in]1,3[$ tel que : $4f'(c) = f^2(c)$.

2) Soit (U_n) une suite définie sur IN et vérifiant pour tout $n \in IN^*$, $U_n^2 - U_{n+1}.U_{n-1} = 1$.

   Montrer que la suite (V_n) définie sur IN* par $V_n = \dfrac{U_{n+1} + U_{n-1}}{U_n}$ est une suite constante.

3) Soit a, b et c trois nombres complexes de modules sont égaux à 1 et tel que: $a - b + c = 3 - 2i$.
   Calculer $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

4) Résoudre dans C l'équation : $z^5 = \dfrac{1}{z}$

Exercice N°2 (5points)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$. On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) Etudier les branches infinies de (C) puis la tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2)a) Montrer que pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$ (f '' désigne la dérivée seconde de f).

   b) En déduire le sens de variation de la fonction dérivée f ' de f.

   c) En utilisant les inégalités des accroissements finis, montrer que pour tout entier naturel k,
   $f'(k) \leq f(k+1) - f(k) \leq f'(k+1)$.

3) Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f'(k)$

   a) En utilisant 2)c) Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{f(n)}{n+1} \leq U_n \leq \dfrac{f(n+1)}{n+1}$.

   b) En déduire la limite de la suite (U_n)

Exercice N°3 (5 points)

I) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$. On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier et représenter f.

2)a) Montrer que f réalise une bijection de [1, +∞[sur]0 , 1].
On note f^{-1} la fonction réciproque de f.

b) Tracer, dans le même repère, la courbe C' de la fonction f^{-1}.

c) Montrer que pour tout x de]0 , 1], $f^{-1}(x)=\dfrac{(x^2+1)^2}{4x^2}$

II) Soit g la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : g(x) = tanx.

1) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur IR.

2) Montrer que g^{-1} est dérivable sur IR et que $(g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

III) Soit h la fonction définie sur [1, +∞[par : $h(x) = 4(g^{-1}of)(x)$.

1) Montrer que h est strictement décroissante sur [1, +∞[.

2) Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'équation $h(x)=\dfrac{1}{n}$ admet dans [1, +∞[une seule solution a_n.

3) Etudier le sens de variation de la suite (a_n).

4) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $a_n=\dfrac{1}{\sin^2(\frac{1}{2n})}$. En déduire la limite de la suite (a_n).

Exercice N°4 **(6 points)**

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en B tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

On désigne par O le milieu de [AC] , par J le milieu de [BC] et par D le symétrique de B par rapport à (AC).

1) Montrer que le quadrilatère ABOD est un losange.

2) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui transforme A en O et B en C.

b) Montrer que R est une rotation de centre D.

3) On désigne par R_C la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, par R_B la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et par T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. On pose $f = R_C o T o R_B$.

a) Déterminer f(B).

b) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}})\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$

c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

4) Soit $g=T_{\overrightarrow{AB}}oS_O$.

a) Déterminer g(C).

b) Caractériser g.

c) On pose M' = $T_{\overrightarrow{AB}}$ (M) et M'' = S_O (M) où M est un point quelconque du plan
Montrer que le point J est le milieu du segment [M'M'']

5) On désigne par I le milieu du segment [OA] et par K le milieu du segment [AB].
Soit φ l'antidéplacement qui transforme B en A et A en O.

a) Montrer que φ est une symétrie glissante puis déterminer ses éléments caractéristiques.

b) Montrer que φ(O) = D.

c) Soit E = φ(D) , montrer que E et B sont symétriques par rapport au point O.

Fin