Exercice N°1 (8 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré de centre O et de sens direct. On désigne par I et J les milieux respectifs des côtés [AD] et [CD], soit E le point du plan tel que DBE soit un triangle équilatéral de sens direct.

« Faire une figure claire, prendre AB = 3cm »

1/ On pose : $f = t_{\overrightarrow{AD}} o S_{(OA)}$

a) Déterminer f(A) et f(D).

b) En déduire que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

2/ a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoi B sur A et A sur D.

b) Caractériser R.

3/ On pose $g = R_{(B,\frac{\pi}{6})} o R_{(E,\frac{\pi}{3})}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

4/ Soit $r = R_{(O,\frac{\pi}{2})}$ et on pose $t = g \circ r^{-1}$. Déterminer t(A) puis caractériser t.

5/ Pour tout M du plan P, on pose $M_1 = r(M)$ et $M_2 = g(M)$.

a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement h qui transforme A en M_1 et D en M_2.

b) Comparer h et $t_{\overrightarrow{AM_1}} o S_{(OA)}$.

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h dans chacun des cas suivants :

c_1)) M$\in$ (BD)

c_2)) M$\in$ la parallèle à (AC) passant par D.

6/ Soit Δ une droite variable passant par A distincte de (OA), on désigne par B' et D' les projetés orthogonaux respectifs des points B et D sur la droite Δ.

a) Soit Δ' la droite perpendiculaire à Δ passant par D. Déterminer les images par r des droites Δ 'et Δ.

b) En déduire l'image du point D' par r.

c) Montrer que le cercle de diamètre [B'D'] passe par un point fixe lorsque Δ varie.

Exercice N°2 (4points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,

1/ On considère l'équation (E_θ) : $z^2 + i(e^{i\theta} - 2)z + e^{i\theta} - 1 = 0$; $\theta \in]\frac{\pi}{2},\pi[$

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_θ)

a) Sans Résoudre l'équation (E_θ), montrer que : $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

b) Résoudre dans C, l'équation (E_θ) . On désigne par z_1 la solution indépendante de θ.

c) Donner les solutions de (E_θ) sous forme trigonométrique.

d) Existe-t-il une valeur de θ pour laquelle le triangle OM_1M_2 soit rectangle en O ? (M_1 et M_2 sont les images respectives de $z_1$et z_2 dans le plan complexe)

2/ Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe $(i - i e^{i\theta})$ lorsque θ varie dans l'intervalle, $]\frac{\pi}{2}, \pi[$

3/ Soient les points A(1) et B(i) et f : P\{B} → P \A} , M(z) → M' (z') tel que $z' = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$

a) Montrer que : si $z \neq i$ et $|z| = 1$ alors Z' est imaginaire.

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.

c) Construire M' sachant que M désigne un point du cercle trigonométrique privé du point B

Exercice N°3 **(4 points)**

On considère la fonction f définie sur]-∞, 1] par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x-1} - \sqrt{2} \text{ si } x \prec 0 \\ f(x) = -\sqrt{1+\cos(\pi x)} \text{ si } x \in [0,1] \end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue en 0.
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
   c) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Intérpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) En déduire que f réalise une bijection de]-∞,1] sur]-∞,0].

3) a) Calculer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(-1)$.
   b) Pour tout $x \in]-\infty, -\sqrt{2}[$, exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

4) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-\sqrt{2}, 0[$ et que pour tout $x \in]-\sqrt{2}, 0[$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{2-x^2}}$.

Exercice N°4 **(4 points)**

On considère les suites réelles (U_n) et (V_n) définies sur IN par: $U_0 = 3$ et pour $n \in IN$, $U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$ et $V_n = \frac{7}{U_n}$.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$, $U_n > 0$ et $V_n > 0$.

2) a) Démontrer que pour tout $n \in IN$, $(U_n + V_n)^2 - 28 = (U_n - V_n)^2$.
   b) En déduire que pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{1}{4U_{n+1}}(U_n - V_n)^2$.
   c) Conclure que pour tout $n \in IN$, on a : $U_n - V_n \geq 0$.

3) a) Prouver que la suite (U_n) est décroissante.
   b) En déduire que la suite (V_n) est croissante.

4) a) En s'aidant de la question 2.c et de la question 3.b, démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $U_n \geq \frac{21}{8}$.
   b) Utiliser le résultat précédent et le résultat de 2.b pour démontrer que pour tout n de IN,
   $U_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{10}(U_n - V_n)^2$
   c) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout n de IN, $U_n - V_n \leq \frac{1}{10^{2^n - 1}}$
   d) En déduire la limite de $U_n - V_n$ lorsque n tend vers +∞.

5) Conclure que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.