Exercice N°1 (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de sens direct et de centre O. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC] et par R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1/ Caractériser chacune des applications suivantes :

a) $\varphi_1 = S_{(OJ)} \circ S_{(OB)}$

b) $\varphi_2 = \varphi_1 \circ S_{(BD)}$

2/ Soit φ une isométrie qui transforme A en B et B en C.

a) Montrer que φ est soit une rotation, soit une symétrie glissante.

b) On suppose que φ est une rotation, déterminer ses éléments caractéristiques. On la note φ_1.

c) On suppose que φ est une symétrie glissante, déterminer ses éléments caractéristiques. On la note φ_2

3/ a) On pose $f = R \circ \varphi_1$. En décomposant convenablement R et φ_1 en symétries orthogonales, montrer que f est une symétrie centrale dont on précisera le centre.

b) On pose $g = R^{-1} \circ \varphi_1$. Caractériser g.

4/ Soit M un point quelconque n'appartenant pas à la droite (AB). On pose M'= φ_1(M) et M''= R(M'). Montrer que AMBM'' est un parallélogramme.

5/ On pose $h = S_{(BD)} \circ S_I$ et on désigne par K le milieu du segment [AD].

a) Déterminer h(A) et h(B) . En déduire h(I).

b) En décomposant S_I en deux symétries orthogonales d'axes convenablement choisis, montrer que $h = \varphi_2$.

Exercice N°2 (5points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$

1/ Justifier que pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{1 + x^2} > 0$

2/ Montrer que pour tout réel x, f(x).f(-x) = 1. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3/ a/ Montrer que f est dérivable sur IR et que pour tout $x \in$ IR, $f'(x) = \frac{f(x)}{2\sqrt{1+x^2}}$

b/ Dresser le tableau de variation de f.

c/ Déterminer les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$ de f puis tracer $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.

4/ a/ Montrer que pour tout réel x, $x < \sqrt{1 + x^2} \leq (\sqrt{1 + x^2})^2$.

En déduire que pour tout réel x, $f(x) < \sqrt{2}\sqrt{1 + x^2}$

b/ Montrer que l'équation : f(x) = x admet dans IR une unique solution α et que : $2 \leq \alpha \leq 2{,}2$

5/ Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a/ Montrer que pour tout $n \in$ IN, $U_n \leq \alpha$.

b/ Etudier la monotonie de la suite (U_n).

c/ En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice N°3 (4 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et i .
Soit l'application f qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-i}{\bar{z}}$

1/ Montrer que f n'admet aucun point invariant.
2/ Déterminer l'ensemble des antécédents par f du point A
3/ Déterminer l'ensemble Γ des points M pour lesquels les points O, M et M' sont alignés.
4/ a) Montrer que pour tout point M de P \ {O}, les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux.
b) Montrer que pour tout point M de P \ {O, B}, $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM}})\ [2\pi]$
c) En déduire une construction du point M' à partir d'un point M donné n'appartenant pas à (OB).
5/ a) Montrer que : $z(1 - z'\overline{z'}) = i\,(1 - z')$
b) En déduire que si M'appartenant au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ alors M est l'image de M' par une rotation r que l'on caractérisera.

Exercice N°4 (5 points)

NB : Les questions 1/, 2/, 3/ 4/ et 5/ de cet exercice sont indépendantes !

1/ Soit (U_n) la suite définie sur IN* par : $U_1 = \frac{2}{3}$ et pour tout entier $n \geq 1$, $U_{n+1} = \frac{U_n}{2(2n+1)U_n + 1}$.

a/ On pose $V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n}$, $n \in$ IN* et pour $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} V_k$.
Montrer que la suite V est arithmétique puis exprimer S_n en fonction de n.

b/ En deduire que pour tout $n \geq 1$, $U_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

c/ Calculer $T = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_{2021}$

2/ On considère la suite (U_n) définie sur IN* par : $U_n = \frac{1!}{n!} + \frac{2!}{n!} + \frac{3!}{n!} + \cdots + \frac{n!}{n!}$

Montrer que pour tout $n \geq 3$, $1 \leq U_n \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)}$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

3/ Soit (U_n) une suite définie sur IN et vérifiant pour tout $n \in$ IN, $U_{n+1} = U_n - \frac{5}{U_n^2}$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

4/ Soit a et b deux nombres complexes de module 1. Montrer que pour tout nombre complexe z , le nombre $Z = \frac{\bar{z} + abz}{b-a}$ est imaginaire.

5/ Soit f et g deux fonctions continues sur [a,b] et dérivables sur]a,b[et tel que pour tout $x \in$]a,b[$g'(x) \neq 0$.

Montrer qu'il existe $c \in$]a,b[tel que : $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$