L.P. Kairouan	**Devoir de synthèse N°1**	**Prof : Chouihi**
Le : 03 / 12 /2019	**Durée : 3heures**	**Classe : 4M$_2$**

Exercice N°1 **(4 points)**

Soit f la fonction définie sur]-1, +∞[par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ et C sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Donner une équation de la tangente Δ à C au point d'abscisse 0 puis tracer Δ et C.

2/ Soit g la fonction définie sur [0, +∞[par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\frac{-1}{2} \leq g'(x) \leq 0$.

b) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :
Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $1 - \frac{x}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1$

c) En déduire que : Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $x - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq x$

3/ Soit (U_n) la suite réelle définie sur IN* par $U_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$

a) Montrer que pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$, $\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2n^2} \leq f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{n+1}{2n}$

c) En déduire la limite de la suite (U_n).

Exercice N°2 **(4 points)**

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre O et de sens direct.
On désigne par I le milieu du segment [AB] ; J le milieu du segment [AD] et K le milieu du segment [BC].
Soit f une isométrie qui transforme A en D et D en C et dont l'ensemble des points invariants n'est pas vide.

1) a) Montrer que f admet un unique point invariant.
   b) Caractériser alors f.

2) Soit g l'isométrie sans point fixe qui transforme A en D et I en J.
   a) Montrer que g(B) = A.
   b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques.

3) On pose E = g(K).
   a) Montrer que $E \in (AI)$.
   b) Prouver que A est le milieu du segment [EI].

4) On pose $\varphi = g^{-1} \circ f$
   a) Déterminer φ(I) et φ(A) puis caractériser φ.
   b) Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan vérifiant f(M) = g(M).

Exercice N°3 **(5 points)**

N.B : Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes !

1/ Déterminer les valeurs des entiers naturels n tels que : $7^{n+1} - (n+1).7^{n} - 1 \equiv 0 \pmod{4}$

2/ Montrer que pour tout entier x on a : $x^3 \equiv x \pmod{3}$ et déduire que : $xy(x^2 - y^2) \equiv 0 \pmod{3}$ $\forall(x,y)\in \mathbb{Z}^2$

3/ Résoudre dans l'ensemble Z des entiers relatifs , l'équation : $x^3 + 5x + 2 \equiv 0 \pmod{8}$

4/ Montrer que pour tout entier naturel n : $2\times 7^{2n+1} + 3^{n+2}$ est divisible par 23.

5/ Montrer que pour tout entier a : si $a \equiv 1 \pmod{10}$ alors $a^{10} \equiv 1 \pmod{100}$

Exercice N°4 **(4 points)**

Soit f l'application qui à tout nombre complexe z associe z' tel que : $z' = f(z) = i + \frac{2}{\bar{z}+i}$.

On désigne par T l'application du plan complexe privé du point A(i) dans le plan complexe qui à tout point M(z) associe le point M'(z').

1/ a) Calculer f(1) et f(2 + i)

b) Résoudre, dans C, l'équation : f(z) = 0

2/ Calculer $\arg[(z' - i)(\bar{z} + i)]$. Que peut-on déduire pour les points A, M et M' ?

3/ Exprimer l'affixe z'' de M'' = ToT(M). Que peut-on conclure pour T ?

4/ On désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des points invariants par T.

a) Montrer que $M\in\mathscr{C}$ si et seulement si $AM = \sqrt{2}$

b) Caractériser géométriquement $\mathscr{C}$.

5/ Dans cette question on suppose que $z = 1 + i + e^{i\theta}$, où θ est un nombre réel et on désigne par B le point d'affixe 1 + i .

a) Quelle est la courbe Γ décrite par le point M, d'affixe z, lorsque θ décrit $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$?

b) Montrer que : $z' = 1 + i[1+\tan(\frac{\theta}{2})]$. A quelle courbe Γ' appartient le point M' d'affixe z' ?

Exercice N°5 **(3 points)**

N.B : Les deux questions de cet exercice sont indépendantes !

1/ Soit a et b deux réels tel que : ab > 0.

Soit f une fonction continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[.

En appliquant le théorème de Rolle à une fonction convenablement choisie montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que : $\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3} = \frac{f'(c)}{3c^2}$

2/ z et z' sont deux nombres complexes non nuls. Montrer l'équivalence suivante :

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff \arg(z) \equiv \arg(z') \; [2\pi]$$