| | | |
|---|---|---|
| **L. P. Kairouan** | **Devoir de synthèse N°1** | **Prof: Chouihi** |
| **Le : 04 - 12- 18** | **Durée : 3heures** | **Classe: 4M1** |

## Exercice N°1 (3 points)

Complétez puis remettre la feuille jointe.

## Exercice N°2 (3 points)

Soit U la suite réelle définie sur IN par : $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$

1) a) Montrer que la suite U est croissante.

b) Montrer que pour tout n de IN; $U_{2n} - U_n \geq \frac{n}{4n+1}$ .

c) Prouver que U est divergente.

d) Montrer que $\lim_{n\mapsto+\infty} U_n = +\infty$

2) Pour tout entier naturel non nul on pose $V_n = \frac{U_n}{n^2}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n; $\frac{n+1}{2n+1} \leq U_n \leq n+1$.

b) Montrer que la suite V est convergente et donner sa limite.

## Exercice N°3 (4 points)

1) a) Résoudre dans C, l'équation $(E_\theta)$ : $z^2 + i\,(e^{i\theta} - 2)\,z + e^{i\theta} - 1 = 0$ ; $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

b) Donner les solutions de $(E_\theta)$ sous forme trigonométrique.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe $(i - i\,e^{i\theta})$ lorsque $\theta$ varie dans l'intervalle, $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

3) Soient les points A(1) et B(i ) et $f : P\backslash\{B\} \rightarrow P \backslash A\}$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ tel que } z' = \frac{\bar{z} - i}{\bar{z} + i}$$

a) Montrer que : si $z \neq i$ et $|z| = 1$ alors z' est imaginaire pur

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux

c) Construire M' sachant que M désigne un point du cercle trigonométrique privé du point B

## Exercice N°4 (4 points)

Soit f la fonction définie sur [0,1] par $f(x) = 1 + \cos(\pi x)$.

1) a) Montrer que f réalise une bijection de [0,1] sur [0,2].

b) Calculer $f^{-1}(1)$.

2) a) Montrer que la fonction réciproque $f^{-1}$ est dérivable sur ]0,2[.

b) Montrer que pour tout $x \in ]0,2[, (f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\pi\sqrt{2x - x^2}}$

3) On pose pour tout $x \in [0,2]$, $g(x) = f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x)$ .

a) Montrer que g est dérivable sur $]0,2[$ puis calculer $g'(x)$.

b) En déduire que pour tout x de $[0,2]$, $f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x) = 1$.

4) On pose pour tout n de $IN^*$ , $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}(1+\frac{1}{n+k})$

a) Montrer que pour tout n de $IN^*$, $(1+\frac{1}{n})f^{-1}(1+\frac{1}{n}) \le U_n \le (1+\frac{1}{n})f^{-1}(1+\frac{1}{2n})$

b) En déduire que la suite $(U_n)$ est convergente et donner $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ .

## Exercice N°5 (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de sens direct et de centre O. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC] et par R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ .

1/ Caractériser chacune des applications suivantes :

a) $\varphi_1 = S_{(OJ)} o S_{(OB)}$

b) $\varphi_2 = \varphi_1 o S_{(BD)}$

2/ a) Montrer qu'il existe un unique déplacement $\varphi$ transformant A en B et B en C

b) Caractériser $\varphi$.

c) On pose $f = R o \varphi$. Déterminer f(A) puis caractériser f.

d) On pose $g = R^{-1} o \varphi$. Caractériser g.

3/ Soit M un point quelconque n'appartenant pas à la droite (AB). On pose $M' = \varphi(M)$ et $M'' = R(M')$. Montrer que AMBM'' est un parallélogramme.

4/ Soit $\Psi$ l'antidéplacement transformant A en B et B en C.

a) Montrer que $\Psi$ est une symétrie glissante dont on précisera les éléments caractéristiques.

b) On pose $h = R o \Psi$. Déterminer h(I) et h(A) puis caractériser h.

5/ On pose $k = S_{(BD)} o S_I$.

a) Déterminer k(A) et k(B) ; en déduire que $k = \Psi$.

b) En déduire que $\varphi o \Psi = S_{(OJ)} o S_I$ ; caractériser alors $\varphi o \Psi$.