L. P. Kairouan	**Devoir de synthèse N°1**	**Prof: Chouihi**
Le : 23 - 01- 18	**Durée : 4heures**	**Classe: $4M_2$**

Exercice N°1 (4 points)

NB : Les questions de cet exercice sont indépendantes

1) Déterminer le chiffre des unités de 2017^{2018}.
2) a) Déterminer les restes de la division de 5^n par 13 pour n entier naturel.
   b) En déduire que pour tout entier naturel $k \geq 1$, le nombre $N = 2020^{4k+1} + 1435^{4k-1}$ est divisible par 13.
3) Résoudre dans l'ensemble Z des entiers relatifs , l'équation : $x^3 + 5x + 2 \equiv 0 \pmod 8$
4) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le nombre $13^{2n+4} - 2\times 13^{n+2} + 1$ est multiple de 7 ?

Exercice N°2 (3 points)

NB : Les questions de cet exercice sont indépendantes

A/ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Caractériser l'application f du plan P dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que : $z' = (1-i\sqrt{3})z - 2\sqrt{3}$.
2) Caractériser l'application g du plan P dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que : $z' = \frac{1}{2}\bar{z} + \frac{3}{2}i$.

B/ Dans chacun des cas suivants montrer que la fonction f admet des primitives sur I puis trouver une primitive F de f sur I.

a) $f(x) = x^2(\sqrt[3]{2x-1})$ $\quad I = [\frac{1}{2},+\infty[$ $\qquad$ b) $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$ $\quad I = [0,\pi[$

Exercice N°3 (3 points)

On considère la fonction f définie sur IR_+ par $f(x) = \dfrac{4x}{4+x^4}$.

Soit F la primitive de f sur IR_+ et telle que $F(\sqrt{2}) = \dfrac{\pi}{4}$

1) Pour tout $x > 0$, on pose $\varphi(x) = F(2x) + F(\frac{1}{x})$.
   a) Montrer que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$..
   b) En déduire que pour tout $x > 0$ on a : $F(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} - F(2x)$
2) Soit g la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = \sqrt{2\tan x}$.
   a) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0.
   b) Dresser le tableau de variation de g.
   c) En déduire que g est une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $[0,+\infty[$.
   d) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer $(g^{-1})'(x)$.
   e) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$ on a : $F(x) = g^{-1}(x)$.

Exercice N°4 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ par $f(x) = 1 + \sin(\pi x)$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ sur [0,2].
2) a) Montrer que la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur]0,2[.

   b) Montrer que pour tout $x\in]0,2[, (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$
3) On pose pour tout $x\in[0,2]$, $g(x) = f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x)$.
   a) Montrer que g est dérivable sur]0,2[puis calculer g'(x).
   b) En déduire que pour tout x de [0,2], $f^{-1}(2-x) = -f^{-1}(x)$.
4) On pose pour tout n de IN^*, $U_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}(1+\dfrac{1}{n+k})$
   a) Montrer que pour tout n de IN^*, $\dfrac{n+1}{n}f^{-1}(\dfrac{2n+1}{2n}) \leq U_n \leq \dfrac{n+1}{n}f^{-1}(\dfrac{n+1}{n})$
   b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et donner $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}(1-\dfrac{1}{n+k})$

Exercice N°5 (6 points)

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre I et A un point de $\mathscr{C}$. On désigne par B le point image de A par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et par O le milieu du segment [AB] ; la demi droite [OI) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en D.

1) On désigne par S la similitude directe de centre A qui transforme I en O.
   Déterminer le rapport k et l'angle α de S.
2) On désigne par K le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABD.
   a) Montrer que le triangle ADK est rectangle isocèle en K.
   b) En déduire que S(D) = K.
   c) On pose J = A*D, montrer que I, J et K sont alignés.
3) a) On désigne par E le point diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathscr{C}$. Montrer que S(E) = B.
   b) Soit F le point tel que ABEF est un carré de sens direct. Montrer que S(F) = I.
   c) Montrer que les droites (ID) et (EF) sont perpendiculaires et en déduire que (OK) est la médiatrice de [IB]. (on pourra déterminer S<(ID)> et S<(EF)>)
   d) Soit L, le symétrique de I par rapport à O. Montrer que l'image du carré ABEF est le carré ALBI.
4) Soit σ la similitude indirecte qui transforme J en K et K en A.
   a) Déterminer le rapport k' de σ.
   b) Soit Ω le centre de la similitude indirecte σ ; caractériser $\sigma o \sigma$.
      Déterminer $\sigma o \sigma(J)$ et en déduire que $\Omega = D$.
   c) Déterminer l'axe de σ et montrer que $\sigma(I) = H$ où H est l'orthocentre du triangle ABD.
   d) Montrer que $K = D*\sigma(A)$. Construire $A' = \sigma(A)$.
5) Soit $g = \sigma o S$.
   a) Déterminer g(D) et g(A) puis donner la nature de g.
   b) La droite (OJ) coupe (AA') en J' ; montrer que la forme réduite de g est : $g = t_{\overrightarrow{JJ'}} o S_{(JJ')}$.