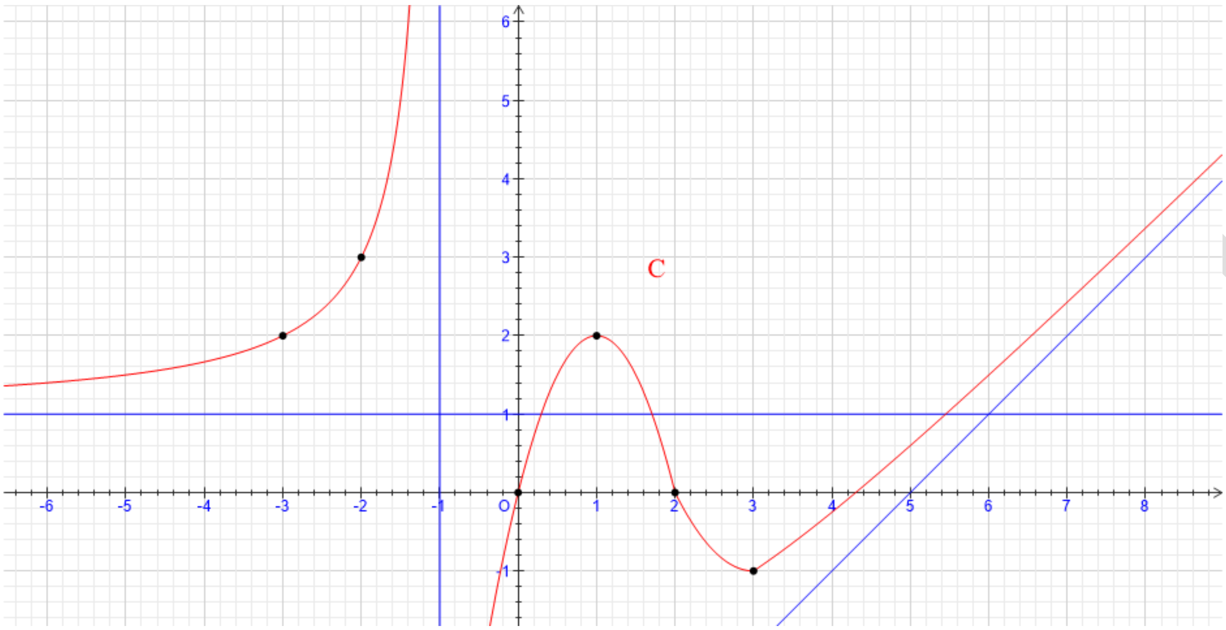
L.P. Kairouan	**Devoir de contrôle N°1**	**Prof : Chouihi**
Le : 11 / 11 /2017	**Durée : 2h 30mn**	**Classe : 4M$_2$**

Exercice N°1 **(6points)**



Dans la figure ci-dessus C est la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction f .

- La droite d'équation : y = 1 est une asymptote à la courbe C au voisinage de - ∞.
- La droite d'équation y = x – 5 est une asymptote à la courbe C au voisinage de +∞.
- La droite d'équation x = - 1 est une asymptote à la courbe C.

A/ Par lecture graphique, déterminer :

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x+3]$

3) a) f of(-3) b) f of(-2) c) f of(0) d) f of(1).

4) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} fof(x)$ b) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} fof(x)$ c) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} fof(x)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} fof(x)$

5) a) f of<]-∞, -1[> b) fof <[0,1] > c) f of <[0, 3[> (en justifiant)

6) a) $\lim\limits_{x\to0} f[x(1-\cos(\frac{1}{x}))]$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(\frac{x^2-1}{x+3})}{x}$ (en justifiant)

B/ On pose h = fof

1) a) Justifier la continuité de h sur [-3, -2]
   b) Déterminer le sens de variation de h sur [-3, -2] et en déduire h< [-3, -2] >.
   c) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, l'équation h(x) = $\frac{-1}{n}$ admet dans [-3, -2] une solution unique a_n .
2) a) Montrer que la suite (a_n) est décroissante et en déduire quelle est convergente.
   b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Exercice N°2 **(4 points)**

A tout nombre réel $\theta \in]-\pi,\pi[$ on associe l'équation à variable complexe z

$$(E_\theta) : \ z^2 - 2i(1 + \cos\theta)z - 2(1 + \cos\theta) = 0 .$$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) .

2) On pose : $z_1 = i(1 + e^{i\theta})$ et $z_2 = i(1 + e^{-i\theta})$ et on désigne par M_1 et M_2 leurs images respectives dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

   a) Déterminer la forme trigonométrique de z_1 et z_2.
   b) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M_1 lorsque θ décrit $]-\pi,\pi[$.
   c) Montrer que M_2 est l'image de M_1 par une symétrie orthogonale que l'on précisera.
   d) En déduire l'ensemble Γ_2 des points M_2 lorsque θ décrit $]-\pi,\pi[$.

Exercice N°3 **(6 points)**

On considère les suites réelles (U_n) et (V_n) définies sur IN par : $U_0 = 3$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2}$ et $V_n = \dfrac{7}{U_n}$.

1) Montrer par récurrence que pour tout n de IN, $U_n > 0$ et $V_n > 0$.

2) a) Démontrer que pour tout $n \in$ IN, $(U_n + V_n)^2 - 28 = (U_n - V_n)^2$.

   b) En déduire que pour tout $n \in$ IN, $U_{n+1} - V_{n+1} = \dfrac{1}{4U_{n+1}}(U_n - V_n)^2$.

   c) Conclure que pour tout $n \in$ IN, on a : $U_n - V_n \geq 0$.

3) a) Prouver que la suite (U_n) est décroissante

   b) En déduire que la suite (V_n) est croissante.

4) a) En s'aidant de la question 2.c et de la question 3.b, démontrer que pour tout $n \geq 1$, $U_n \geq \dfrac{21}{8}$.

   b) Utiliser le résultat précédent et le résultat de 2.b pour démontrer que pour tout n de IN,

   $U_{n+1} - V_{n+1} \leq \dfrac{1}{10}(U_n - V_n)^2$.

   c) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout n de IN, $U_n - V_n \leq \dfrac{1}{10^{2^n - 1}}$.

   d) Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{10^{2^n-1}}\right) = 0$, déterminer la limite de $U_n - V_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5) Conclure que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

6) Justifier que U_3 est une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{-7} près.

Exercice N°4 **(4 points)**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère l'équation (E): $(z^2 - 2i)^n - (z + 1 + i)^{2n} = 0$

1) Vérifier que -1-i est solution de **(E)**

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, u , v) on désigne par A, A' et M les points d'affixes respectives 1 + i, - 1 - i et z .

   a) Montrer que si z est solution de (E) alors MA'(MA-MA')=0.

   b) En déduire que si en plus $z \neq -1-i$ alors M appartient à une droite que l'on précisera.

3) a) Soit $\theta \in]0,2\pi[$, montrer l'équivalence : $\dfrac{z-1-i}{z+1+i} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = (-1+i)\cot\text{an}(\dfrac{\theta}{2})$

   b) Déterminer les racines nième de l'unité.

   c) En déduire de ce qui précède les solutions de **(E)**